

2. Klausur

Lehrstuhl für Ökonometrie
1999

Name:
Matr.Nr.:

Klausur "Einführung in die Ökonometrie"

Aufgabe 1 (25 Punkte)

In der ökonometrischen Abteilung eines führenden Herstellers von Autoreifen wird der Zusammenhang zwischen dem Unternehmensabsatz und den Werbeaufwendungen untersucht. Dabei wird ein lineares Modell

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

verwendet, dessen Variablen wie folgt definiert sind

y_t Absatz in 1000 Stück (logarithmiert)
 x_{t1} nimmt immer den Wert 1 an
 x_{t2} Werbeausgaben in 10 Tsd. DM.

Zur Schätzung des linearen Modells liegen den Ökonometrikern Jahresdaten für die Periode 1990 – 1999 vor. Anhand dieser Daten ermittelt die ökonometrische Abteilung die folgenden Zwischenergebnisse:

$$\sum_{t=1}^T x_{t2} = 10, \quad \sum_{t=1}^T x_{t2}^2 = 50, \quad \sum_{t=1}^T y_t = 10, \quad \sum_{t=1}^T y_t x_{t2} = 40, \quad \sum_{t=1}^T y_t^2 = 60.$$

1. Nennen Sie die Annahmen über den Störterm u_t im linearen Modell, die Sie für eine effiziente Schätzung der Parameter β_1 und β_2 treffen. Erklären Sie kurz, was Sie unter der Effizienz eines linearen Schätzers verstehen.
2. Schätzen Sie die unbekannten Parameter β_1, β_2 und σ des linearen Modells unter den getroffenen Annahmen.
3. Interpretieren Sie die erhaltenen Schätzer b_1 und b_2 .
4. Ermitteln Sie das Bestimmtheitsmaß dieses Regressionsmodells (R^2) und interpretieren Sie den Wert $1 - R^2$.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Der Internetprovider WEBSPEED muss die Computerkapazitäten für das nächste Jahr planen. Hierfür muss insbesondere die Zahl der Internetkunden bei WEBSPEED prognostiziert werden:

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + x_{t3}\beta_3 + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma^2),$$

wobei

y_t die Anzahl der Internetkunden in Tsd,

x_{t1} eine Konstante mit dem Wert 1

x_{t2} den Preis pro Monat von WEBSPEED in DM .

angibt. Es liegen Daten für 24 Monate vor und

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 260.0 & 1.2 & 14.0 \\ 1.2 & 0.4 & -0.4 \\ 14.0 & -0.4 & 2.0 \end{pmatrix}, \quad X'y = 1000 \begin{pmatrix} 0.3 \\ 2.0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

1. Ein Firmenmitglied behauptet, dass sich bei einer Preissenkung beim größten Anbieter von 15 DM auf 10 DM pro Monat die Zahl der Internetkunden bei WEBSPEED substanziell verringern würde. Ist diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ haltbar? Dabei sei Ihnen $\sigma^2 = 10$ gegeben.
2. Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für β_3 zum Konfidenzniveau 95%. Wie bisher sei $\sigma^2 = 10$ vorgegeben. Zu welchem Ergebnis kommen Sie hinsichtlich der Nullhypothese $H_0 : \beta_3 = -2$ auf Basis Ihres Konfidenzintervalls?
3. Wie ändern sich die Ergebnisse in 2), falls Sie die Fehlervarianz schätzen müssen und dabei einen Wert von $\sigma^2 = 20$ erhalten?
4. überprüfen Sie die Nullhypothese, dass eine Preissenkung des größten Anbieters um 1 DM exakt den entgegengesetzten Effekt hat wie eine Preissenkung um 1 DM durch WEBSPEED. Legen Sie dabei ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ zugrunde. Die geschätzte Fehlervarianz ist wie bisher $\sigma = 20$.
5. Könnte sich Ihre Schlussfolgerung in 4) verändern, wenn Sie das Signifikanzniveau aus $\alpha = 0.01$ reduzieren? Wie läßt sich die Reduktion des Signifikanzniveaus interpretieren?

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Die Flugaufsichtsbehörden arbeiten an einem einfachen Modell zur Erklärung der Verspätungszeiten auf inländischen Flughäfen. Dabei wird ein linearer Zusammenhang

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t$$

unterstellt, wobei

- y_t die Gesamtsumme der Verspätungen in Stunden pro Monat,
- x_{t1} eine Konstante mit dem Wert 1
- x_{t2} die Zahl der Starts und Landungen pro Monat .

bezeichnen. Es stehen Monatsdaten für die Jahre 1997 bis 1999 zur Verfügung. Man vermutet, dass sich die Varianzen der Fehler von Jahr zu Jahr unterscheiden. Entsprechende Schätzungen ergaben

$$\hat{\sigma}_I^2 = \hat{\sigma}_{1997}^2 = 1, \quad \hat{\sigma}_{II}^2 = \hat{\sigma}_{1998}^2 = 1.2, \quad \hat{\sigma}_{III}^2 = \hat{\sigma}_{1999}^2 = 1.5$$

Darüber hinaus stehen folgende Informationen zur Verfügung

$$X = \begin{pmatrix} X_I \\ X_{II} \\ X_{III} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \\ y_{III} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_I' X_I &= \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} & X_I' y_I &= \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix} \\ X_{II}' X_{II} &= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 48 \end{pmatrix} & X_{II}' y_{II} &= \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix} \\ X_{III}' X_{III} &= \begin{pmatrix} 12 & 22.5 \\ 22.5 & 60 \end{pmatrix} & X_{III}' y_{III} &= \begin{pmatrix} 45 \\ 75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass sich der EGLS-Schätzer $\hat{\beta} = (X' \hat{\Psi}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Psi}^{-1} y$ für das obige Modell in der Form

$$\hat{\beta} = \left(\frac{X_I' X_I}{\hat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}' X_{II}}{\hat{\sigma}_{II}^2} + \frac{X_{III}' X_{III}}{\hat{\sigma}_{III}^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_I' y_I}{\hat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}' y_{II}}{\hat{\sigma}_{II}^2} + \frac{X_{III}' y_{III}}{\hat{\sigma}_{III}^2} \right)$$

schreiben läßt.

2. Schätzen Sie die Parameter β_1 und β_2 des Modells.
3. Berechnen Sie die geschätzte Standardabweichung von β_2 . Inwiefern können Sie diese verwenden, um auf einen signifikanten Einfluß der Starts und Landungen zu testen?
4. Welche Eigenschaften hätte Ihr gewählter Schätzer, wenn die genannten Fehlervarianzen nicht die geschätzten, sondern die wahren Werte wären?

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Bei der Schätzung eines linearen Modells der Form

$$y_t = \beta_1 + x_t \beta_2 + e_t, \quad t = 1, \dots, 7,$$

erhält ein wissenschaftlicher Mitarbeiter die folgenden geschätzten Störterme:

t	1	2	3	4	5	6	7
\hat{e}_t	1.5	2.0	1.0	-0.5	-1.5	-0.5	-2.0

1. Führen Sie anhand der geschätzten Residuen einen Test auf Autokorrelation 1. Ordnung der zugrundeliegenden Störterme e_t durch. Gehen Sie im folgenden davon aus, dass Sie die Hypothese der Autokorrelationsfreiheit verworfen haben.
2. Bestimmen Sie für das Regressionsmodell

$$\hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + v_t$$

einen Schätzer für ρ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

3. Können Sie anhand ihrer bisherigen Ergebnisse einen Schätzer für die Matrix $\Gamma = E[ee']$ angeben. Berechnen Sie nichts. Begründen Sie ihre Antwort.
4. Bestimmen Sie für das obige Modell eine geschätzte Transformationsmatrix P so, dass das Modell in ein lineares Modell überführt wird, dessen Störterme den Standardannahmen der linearen Regression genügen.
5. Begründen Sie kurz, warum für die oben angegebenen geschätzten Fehler offensichtlich $\sum_{t=1}^7 \hat{e}_t = 0$ gilt. Ist das auch für die Summen $\sum_{t=1}^7 e_t = 0$ und $\sum_{t=2}^7 \hat{v}_t$ der Fall? Begründen Sie auch hier kurz Ihre Auffassung.