Aufgabe 1 (25 Punkte)

Für eine Restaurant-Kette soll der Einfluss des Einkommens der Kunden auf den Bruttoumsatz des Restaurants untersucht werden. Dafür wird folgendes Modell aufgestellt:

$$y_l = \beta_1 + x_{l2}\beta_2 + e_l,$$

mit

y_l : Bruttoumsatz (in Millionen Euro/Jahr) in Restaurant l,
x_{l2} : Durchschnittliches Jahreseinkommen der Kunden, die in einem Umkreis von 3 km vom Restaurant l wohnen (in 100 000 Euro/Jahr).

Folgende Zwischenergebnisse für Hamburg und Berlin liegen vor:

Hamburg:

$$\sum_{l=1}^{12} x_{l2} = 2, \quad \sum_{l=1}^{12} x_{l2}^2 = 1, \quad \sum_{l=1}^{12} y_l = 1.4, \quad \sum_{l=1}^{12} y_l x_{l2} = 0.35, \quad \sum_{l=1}^{12} y_l^2 = 0.2.$$

Berlin:

$$\sum_{l=1}^{18} x_{l2} = 3, \quad \sum_{l=1}^{18} x_{l2}^2 = 1.5, \quad \sum_{l=1}^{18} y_l = 2.2, \quad \sum_{l=1}^{18} y_l x_{l2} = 0.45, \quad \sum_{l=1}^{18} y_l^2 = 0.3.$$

1. Schätzen Sie den Koeffizientenvektor β unter Verwendung der Daten aus Hamburg und Berlin! Lässt sich β_2 als Elastizität interpretieren? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

2. Schätzen Sie σ^2.

3. Geben Sie die Kovarianzmatrix der geschätzten Koeffizienten an.

4. Berechnen und interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

5. Welche Annahme treffen Sie über die Regressoren bei der Anwendung der KQ-Methode?

6. Welche Eigenschaften haben die Maximum-Likelihood Schätzer für β und σ^2?

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Die Wachstumsrate der Nominallöhne in den USA soll mit einem einfachen linearen Regressionsmodell erklärt werden. In Abbildung 1 sehen Sie für Quartalsdaten von 1974:1 - 2000:4 Ergebnisse aus Eviews. Die Variablen sind wie folgt definiert:

DW:	Wachstumsrate der Nominallöhne,
C:	Nimmt in allen Perioden den Wert 1 an,
DPROD:	Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität,
DP:	Inflationsrate,
DU:	Wachstumsrate der Arbeitslosigkeit.

1. Welche Variablen üben einen signifikanten Einfluss auf die Wachstumsrate der Löhne aus ($\alpha = 0.05$)? Wie ändert sich Ihre Antwort, wenn Sie $\alpha = 0.01$ zugrunde legen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

2. Überprüfen Sie nun mit Hilfe eines einseitigen Tests ($\alpha = 0.01$), ob die Inflationsrate (DP) einen signifikanten Einfluss hat ($H_1 : \beta_{DP} > 0$). Zu welchem Signifikanzniveau würden Sie Ihre Nullhypothese gerade noch annehmen?

3. Geben Sie ein 99%-Konfidenzinterval für β_{DPROD} an. Testen Sie die Hypothese, dass $\beta_{DPROD} = 1$ gilt ($\alpha = 0.01$). Welche ökonomische Interpretation hat diese Hypothese?

4. Testen Sie die zusammengesetzte Hypothese, dass weder die Inflationsrate (DP) noch die Wachstumsrate der Arbeitslosigkeit (DU) einen signifikanten Einfluss auf das Lohnwachstum haben ($\alpha = 0.05$).

5. Überprüfen Sie mit Hilfe der Angaben aus Abbildung 1 die Hypothese $H_0 : \beta_{DPROD} = \beta_{DP} = \beta_{DU} = 0$. Welche Verteilung hat Ihre Teststatistik unter H_0?

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1. Im GLS-Modell $y = X\beta + e$ wird angenommen, dass $e \sim (0, \Phi)$. Hierbei ist Φ eine positiv–definite $(T \times T)$–Matrix. Der GLS–Schätzer lautet: $\hat{\beta} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1} X'\Phi^{-1}y$.

   Wenn
$$\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{T_2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad T_1 + T_2 = T$$
   gilt, liegt ein Spezialfall von heteroskedastischen Fehlern vor. Mit der Notation
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$
   wollen wir zeigen, dass für den GLS–Schätzer
$$\hat{\beta} = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right)$$
   gilt.

   1a.) Welche Dimensionen haben y_1, y_2, X_1 und X_2?

   1b.) Geben Sie die Inverse von Φ an.

   1c.) Schreiben Sie $(X'\Phi^{-1}X)$ in Abhängigkeit von $X_1, X_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, und vereinfachen Sie.

   1d.) Schreiben Sie $(X'\Phi^{-1}y)$ in Abhängigkeit von $y_1, y_2, X_1, X_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, vereinfachen und schließen Sie auf $\hat{\beta}$.

   1e.) **Computeraufgabe:** Testen Sie anhand der EVIEWS–Ergebnisse in Abbildung 2 die Nullhypothese einer homoskedastischen Fehlervarianz für das Lohnmodell ($\alpha = 0.05$). Nehmen Sie unter H_1 an, dass die Fehlervarianz im Zeitraum von 1974:1-1989:4 größer ist als für die Zeit nach 1989.

2. Im Modell
$$y = X\beta + e, \quad e_t = \rho e_{t-1} + v_t, \quad |\rho| < 1 \tag{1}$$
   sind die Fehler autokorreliert 1. Ordnung. Der AR–Koeffizient ρ kann geschätzt werden durch
$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{e}_t \hat{e}_{t+1}}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{e}_t^2},$$
   wobei $\hat{e}_t$ die Residuen aus der OLS–Schätzung des Modells (1) sind. Wir wollen nun zeigen, dass $\hat{\rho}$ als OLS–Schätzer des Modells
$$\hat{e}_t = \rho \hat{e}_{t-1} + v_t \tag{2}$$
   interpretiert werden kann.

   2a.) Schreiben Sie die Beobachtungen $t = 2, 3 \ldots, T$ für Modell (2) untereinander. Schreiben Sie das Modell in Matrixnotation, $y_e = X_e \rho + v$. Wie sehen die Komponenten von y_e und X_e aus?

   2b.) Berechnen Sie $X_e'X_e, (X_e'X_e)^{-1}, X_e'y_e$, und schließen Sie auf die Formel für $\hat{\rho}$.

   2c.) **Computeraufgabe:** Führen Sie mit den EVIEWS–Ergebnissen aus Abbildung 1 einen Durbin–Watson Test auf einem 5% Signifikanzniveau durch.

LS // Dependent Variable is DW
Date: 07/29/03 Time: 11:57
Sample: 1974:1 2000:4
Included observations: 108

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.227183	0.156342	1.453113	0.1492
DPROD	0.725703	0.128937	5.628339	0.0000
DP	0.201261	0.099055	2.031815	0.0447
DU	-0.752273	0.239123	-3.145966	0.0022

R-squared	0.357057	Mean dependent var	0.719596
Adjusted R-squared	0.338511	S.D. dependent var	0.976577
S.E. of regression	0.794270	Akaike info criterion	-0.424331
Sum squared resid	65.60988	Schwarz criterion	-0.324993
Log likelihood	-126.3315	F-statistic	19.25208
Durbin-Watson stat	2.076952	Prob(F-statistic)	0.000000

Coefficient Covariance Matrix

	C	DPROD	DP	DU
C	0.024443	-0.008124	-0.012882	0.003838
DPROD	-0.008124	0.016625	0.002216	0.009333
DP	-0.012882	0.002216	0.009812	-0.005243
DU	0.003838	0.009333	-0.005243	0.057180

Abbildung 1: EVIEWS-Ergebnisse, Teil 1

LS // Dependent Variable is DW
Date: 07/29/03 Time: 11:57
Sample: 1974:1 1989:4
Included observations: 64

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.344646	0.257461	1.338638	0.1857
DPROD	0.648359	0.175459	3.695229	0.0005
DP	0.156023	0.140281	1.112220	0.2705
DU	-0.801641	0.309739	-2.588118	0.0121

R-squared	0.344224	Mean dependent var	0.742651
Adjusted R-squared	0.311435	S.D. dependent var	1.135716
S.E. of regression	0.942415	Akaike info criterion	-0.058158
Sum squared resid	53.28873	Schwarz criterion	0.076772
Log likelihood	-84.95100	F-statistic	10.49822
Durbin-Watson stat	2.181081	Prob(F-statistic)	0.000012

LS // Dependent Variable is DW
Date: 07/29/03 Time: 11:57
Sample: 1990:1 2000:4
Included observations: 44

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.121763	0.270683	-0.449836	0.6553
DPROD	1.025883	0.183517	5.590125	0.0000
DP	0.440781	0.293686	1.500856	0.1412
DU	-0.706175	0.464106	-1.521583	0.1360

R-squared	0.461380	Mean dependent var	0.686062
Adjusted R-squared	0.420983	S.D. dependent var	0.693863
S.E. of regression	0.527982	Akaike info criterion	-1.190878
Sum squared resid	11.15060	Schwarz criterion	-1.028679
Log likelihood	-32.23397	F-statistic	11.42128
Durbin-Watson stat	1.718143	Prob(F-statistic)	0.000015

Abbildung 2: EVIEWS-Ergebnisse, Teil 2