Lösung Klausur 2004 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1.

$$
\begin{aligned}
b &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 21.4 \\ 22 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{10 \cdot 19 - 12^2} \begin{bmatrix} 19 & -12 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.4 \\ 22 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{190 - 144} \begin{bmatrix} 19 \cdot 21.4 - 12 \cdot 22 \\ -12 \cdot 21.4 + 10 \cdot 22 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 142.6 \\ -36.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.10 \\ -0.8 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.

$$\frac{\partial y}{\partial x_{t2}} = \beta_2 \simeq b_2 \text{ Marginale Änderung}$$

Wenn der durchschnittlicher Preis des Tees um eine Einheit steigt, sinkt der Teekonsum um 0.8 Einheiten.

3. Schätzen Sie die Varianz des Störterms e_t.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{y'y - b'X'y}{T - K} \\
&= \frac{49 - \begin{bmatrix} 3.10 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.4 \\ 22 \end{bmatrix}}{10 - 2} \\
&= \frac{49 - (3.1 \cdot 21.4 - 22 \cdot 0.8)}{8} \\
&= \frac{49 - 48.74}{8} = \frac{0.26}{8} = 0.0325
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{b'X'y - T\overline{y}^2}{y'y - T\overline{y}^2} \\
&= \frac{48.74 - 10 \cdot (2.14)^2}{49 - 10 \cdot (2.14)^2} \\
&= \frac{48.74 - (10 \cdot 4.5796)}{49 - (10 \cdot 4.5796)} \\
&= \frac{48.74 - 45.796}{49 - 45.796} = \frac{2.944}{3.204} \\
&= 0.91885144 \\
1 - R^2 &= 1 - 0.91885144 \\
&= 0.081148560
\end{aligned}
$$

Interpretation von $1 - R^2$: 8.115% der Varianz der Teekonsums wird nicht durch das lineare Regressionsmodell erklärt.

5.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= X_0 b \\
y_{2000} &= X_{2000} b \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.10 \\ 0.8 \end{bmatrix} \\
&= 3.10 - 0.8 * 1.5 \\
&= 3.10 - 1.2 \\
&= 1.9
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{T}, \\
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{\widehat{e}'\widehat{e}}{(T-K)}, \quad \widehat{e}'\widehat{e} = \widehat{\sigma}^2(T-K) \\
\widetilde{e}'\widetilde{e} &= \widehat{e}'\widehat{e} \\
\frac{\tilde{\sigma}^2 T}{\sigma^2} &= \frac{\frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{T} T}{\sigma^2} = \frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{\sigma^2} \\
&= \frac{\widehat{e}'\widehat{e}}{\sigma^2} = \frac{\widehat{\sigma}^2(T-K)}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
b &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= \left[\begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & \dots & x_{T2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{T2} \end{pmatrix}\right]^{-1} \\
& \quad \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & \dots & x_{T2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \\
b_1 &= \left(\sum_{t=1}^{10} x_{t2}^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{10} y_t x_{t2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{10} y_t x_{t2}}{\sum_{t=1}^{10} x_{t2}^2} = \frac{22}{19} = 1.1578947
\end{aligned}
$$

Interpretation: Aus ökonomischen Gründen würde man das erste Modell (Modell mit der Konstanten $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + e_t$) bevorzugen, weil der geschäzte β_2 Koeffizient für dieses Modell ein negatives Vorzeichen hat. b_2 für das zweite Modell ($y_t = \beta_2 x_{t2} + e_t$) ist positiv. Weil zwischen dem Preis eines Produkts und der Nachfrage dieses Produkts eine negative Beziehung geben soll, bevorzugen wir das Modell mit der Konstanten.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1.) $H_0 : \beta_K = 0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \beta_K \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{\hat{e}'\hat{e}}{T-K} \\
&= \frac{y'y - b'X'y}{T-K} \\
&= 60 - \frac{\begin{bmatrix} 1.4 & 0.2 & -1.8 \end{bmatrix}}{10-3} \begin{bmatrix} 7 & -7 & -26 \end{bmatrix} \\
&= 0.6857
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\beta_K}{\hat{\sigma}\sqrt{a^{KK}}} \sim t_{(T-K,\alpha/2)} \\
t_2 &= \frac{0.2}{\sqrt{0.6857 \cdot 0.07}} \\
&= 0.9129 \\
t_3 &= \frac{-1.8}{\sqrt{0.6857 \cdot 0.08}} \\
&= -7.6853 \\
t_{7,2.5\%} &= 2.365
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_2 nicht ab, da $|t_2| = 0.9129 < 2.365 (= t_{7,2.5\%})$
$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_3 ab, da $|t_3| = 7.6853 > 2.365 (= t_{7,2.5\%})$

2.) $H_0 : R\tilde{\beta} = r \quad \text{vs.} \quad H_1 : R\tilde{\beta} \neq r$

$$\begin{aligned}
R\tilde{\beta} &= r \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\lambda &= \begin{bmatrix} 0.2 & -1.8 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 0.07 & -0.04 \\ -0.04 & 0.08 \end{bmatrix}^{-1}}{2 \cdot 0.6857} \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.2 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08 & 0.04 \\ 0.04 & 0.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.8 \end{bmatrix} 182.2955 \\
&= 36.6778 \\
F_{(J,T-K,5\%)} &= F_{2,7,5\%} = 4.74
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_2 und β_3 ab, da $|\lambda| = 36.6778 > 4.74 (= F_{2,7,5\%})$ (β_2 und β_3 sind gemeinsam signifikant)

3.) $H_0 : R \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} \neq 0$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(-0.2)(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(-0.2)}{0.6857} \\
&= 0.05833[\begin{pmatrix} 0.1 & -0.02 & 0.04 \end{pmatrix} R]^{-1} \\
&= 0.4861 \\
F_{(1,7,5\%)} &= 5.59
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 nicht ab, da $\lambda = 0.4861 < 5.59 (= F_{(1,7,5\%)})$

4.) $\sigma^2 = 0.7 \quad \longrightarrow$ das 95%-KI für β_3:

$$\begin{aligned}
[-1.8 \overset{+}{-} z_{2.5\%} \cdot \sqrt{0.7 \cdot 0.08}] &= 1 - \alpha \\
\begin{bmatrix} -2.2638 & -1.336 \end{bmatrix} &= 0.95
\end{aligned}$$

Hypothesentest: $H_0 : \beta_3 \leq -2.2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_3 > -2.2$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-1.8 + 2.2}{\sqrt{0.7 \cdot 0.08}} \\
&= 1.6903 \\
Z_{(5\%)} &= 1.645
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 ab, da $\lambda = 1.6903 > 1.645 (= F_{(1,7,5\%)})$

$\Longrightarrow$ $\alpha = 50\% + \alpha^*$ muss so gewählt werden, dass H_0 gerade noch angenommen wird:

$$z_{\alpha_*} = 1.6903 \qquad \alpha^* = 1 - 0.4545$$

$\Longrightarrow$ nimm bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 4.55\%$ H_0 gerade noch an.

5.) a) Wenn $Prob_K < \alpha$, dann lehne $H_0 : \beta_K = 0$ ab $\Longrightarrow$ somit sind die Variablen x_2, x_3, C auf 1% SN signifikant

b) $H_0 : \beta_4 = -2 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_4 \neq -2$

$$\begin{aligned} t_4 &= (-0.876377 + 2)/0.896924 \\ &= 1.2527 \\ t_{(123-19,2.5\%)} &\approx 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 nicht ab, da $t_4 = 1.2527 < 2 (= t_{(4,2.5\%)})$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1.) a) für $T = 6$ und $K = 2 \qquad H_0 : p = 0 \quad$ vs. $\quad H_1 : p > 0$

$d = 0.449687 \qquad d_L^* = 0.61 \qquad d_U^* = 1.4 \qquad \Longrightarrow$ Lehne H_0 auf 5% SN ab.

b)

$$\hat{p} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2} = \frac{0.0591}{0.1301} = 0.4542$$

(ii)

$$\begin{aligned} E[b] &= E[(X'X)^{-1}X'y] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'X\beta] + E[(X'X)^{-1}X'e] \\ &= E[\beta] + (X'X)^{-1}X' \underbrace{E[e]}_{=0} \\ &= \beta \end{aligned}$$

2.) a)

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 33.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 35.59 \\ 179.63 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 33.5 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35.59 \\ 175.63 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.4673 \\ 4.4426 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
COV[\hat{\beta}] &= \hat{\sigma}_y^2 (X'\Psi^{-1}X)^{-1} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 33.5 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Daraus folgt, dass $\sum^b - \sum^{\hat{\beta}}$ eine positiv definite Matrix ist und damit $\hat{\beta}$ effizienter als b. Mit dem Gaus-Markov-Theorem kann man außerdem zeigen, dass es keinen kleineren Schätzer als $\sum^{\hat{\beta}}$ in der Klasse der linearen Schätzer gibt. Bei Annahme der Normalverteilung gibt es überhaupt keinen $\Longrightarrow$ Cramer Lao.