Lösung Klausur 2003 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1.) KQ-Methode (kein systematischer Fehler, Homoskedastizität und Freiheit von Autokorrelation):

- $E(e_t) = 0, \ \forall\, t.$
- $E(e_t^2) = \sigma^2, \ \forall \ t.$
- $E(e_t e_s) = 0, \ \forall\, t, s\ , t \neq s$

oder in Vektorform:

- $E(e) = 0$ und
- $E(ee') = \sigma^2 I.$
- $E(e_t) = 0, \ \forall\, t.$

d.h.
$\longrightarrow$ Modell ist im Mittel richtig,
$\longrightarrow$ e_t variiert unsystematisch (weisses Rauschen),
$\longrightarrow$ x_{t2} muss gegeben und nicht stochastisch(=nicht zufällig=fest) sein.

Für die ML-Methode nehmen wir zusätzlich zu den Annahmen für die KQ-Methode an, dass die Störterme normalverteilt sind: $e_t \sim N(0, \sigma^2)$, in Vektorform $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$

2.) Schätzung des Koeffizientenvektors: $b = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 33 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.4 \end{bmatrix}$

3.) $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{T-K} = \frac{y'y - y'Xb}{T-K} = \frac{70-61.8}{20-2} = 0.455$

4.) Standardfehler für b_2: $\hat{\sigma}_{\beta_2} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{22}} = \sqrt{0.455 \cdot \frac{20}{75}} = \sqrt{0.121752} = 0.34892$

5.) $\Longrightarrow$ Bestimmtheitsmaß sagt aus, welcher Anteil der Variabilität von y_t (der abhängigen Variable) durch das Regressionsmodell erklärt wird.
$\Longrightarrow$ Im Fall bivariater Regressionen (mit nur einem Regressor auf der rechten Seite) $K = 1$ ist $R^2 = \bar{R}^2$,
$\Longrightarrow$ Im Fall multivariater Regressionen $K > 1 \Longrightarrow$ sollte das korrigierte Bestimmtheitsmaß $\bar{R}^2$ verwendet werden, denn dieses berücksichtigt nur die unabhängigen Variablen, die einen Einfluss auf die abhängige Variable haben (würde man einen neuen Regressor ins Modell integrieren, wäre R^2 unverändert geblieben obwohl der neue Regressor keinen Einfluß auf die abhängige Variable hat).

6.) Prognose: $\hat{y}_0 = x_0 b = \begin{bmatrix} 1 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.4 \end{bmatrix} = 0.6 + 1.75 = 2.35 \Longrightarrow 2.35$ Millionen

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1.) (a) **Hypothese:**

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

$\mid 2.777744 \mid > 1.96 \Longrightarrow$ lehne H_0 auf einem 5% SN ab - β_2 ist signifikant.

(b) **Hypothese:**

$$H_0 : \beta_3 = -0.4 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_3 \neq -0.4 \quad \alpha = 0.10$$

$| 0.610436 |< 1.645 \Longrightarrow$ lehne H_0 auf einem 10% SN nicht ab.

(c) **Hypothese:**

$$H_0 : \beta_2 = 0 \wedge \beta_3 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_2 \neq 0 \vee \beta_3 \neq 0 \quad \alpha = 0.05$$

Lehne H_0 ab, falls $p < \alpha$ $(0.0000 < 0.05) \Longrightarrow$ lehne H_0 ab - β_2 und β_3 sind gemeinsam signifikant.
Lehne H_0 ab, falls $\lambda > F_{KRIT}$ $(28.975 > 3.00) \Longrightarrow$ lehne H_0 auf einem 5% SN ab.

2.) (a) $J = 1$

(b) $R\tilde{\beta}_K - R\beta_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \tilde{\beta}_2 - \beta_2$

(c) $R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{22}$

(d) $\lambda = \frac{(\tilde{\beta}_2 - \beta_2)' a_{22}^{-1} (\tilde{\beta}_2 - \beta_2)}{\hat{\sigma}^2} = \frac{(\tilde{\beta}_2 - \beta_2)^2}{\hat{\sigma}^2 a_{22}}$

(e) $\lambda = \frac{(\tilde{\beta}_2 - \beta_2)^2}{\hat{\sigma}^2 a_{22}} \sim F(J, T-K) \qquad \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(\tilde{\beta}_2 - \beta_2)^2}{\hat{\sigma}^2 a_{22}}} = \frac{\tilde{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}\sqrt{a_{22}}} \sim t_{(T-K)}$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1.) $b = \begin{bmatrix} 100 & 500 \\ 500 & 2600 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 58.5 \\ 229.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.735 \\ -0.63 \end{bmatrix}$
$\Longrightarrow$ Der KQ-Schätzer ist zwar unverzerrt, dennoch ist er ineffizienter im Vergleich zum GLS-Schätzer (die Schätzung für die Varianz wird verzerrt).

2.) $\sigma_K^2 = \frac{\sigma_B^2}{4} \qquad E[ee'] = \sigma_B^2 \Psi$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad P = (P^{-1})^{-1} \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $T_1 = 80$ und $T_2 = 20$

$$\Psi = P^{-1}P^{-1'}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.) GLS: $\hat{\beta} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y = \left(\frac{X'_B X_B}{\hat{\sigma}_B^2} + \frac{X'_K X_K}{\hat{\sigma}_K^2}\right)^{-1}\left(\frac{X'_B y_B}{\hat{\sigma}_B^2} + \frac{X'_K y_K}{\hat{\sigma}_K^2}\right) = \begin{bmatrix} 0.571761 \\ 0.00405 \end{bmatrix}$

4.) Wenn die Ψ-Matrix unbekannt ist, müssen wir sie schätzen. Danach können wir für die Schätzung von β den EGLS-Schätzer $\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Psi}^{-1}y$ verwenden.

5.) **Hypothese:**

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad vs \qquad H_1 : \sigma_2^2 > \sigma_1^2$$

$\left(\lambda = \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{\widehat{\sigma}_1^2} = \frac{(0{,}767064)^2}{(0.677844)^2} = 1.281\right)$ $1.281 < F_C$ $(1.53 < F_{(100-3,100-3),0.05} < 1.66)$

$F_{(97,97),0.05}$ kann zwar nicht direkt aus der Verteiltungstabelle gelesen werden, jedoch sind die kritischen Werte für $F_{(60,60),0.05} = 1.84$, $F_{(60,120),0.05} = 1.66$, $F_{(120,60),0.05} = 1.73$ und $F_{(120,120),0.05} = 1.53$ alle größer als 1.281.
$\Longrightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab. Die Varianzen sind homoskedastisch.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

1.) (a) Die Bedingungen für den Durbin-Watson Test
$\longrightarrow$ (homoskedastische Fehlerterme)
$\longrightarrow$ X ist nicht stochastisch und enthält die Konstante
$\longrightarrow$ normalverteilte Fehlerterme
$\longrightarrow$ nur Autokorrelation

(b) Annahmen für v_t

i) Erwartungswert: $E[v_t] = 0$
ii) Varianz: $E[v_t^2] = \sigma^2$ (konstante Varianz=homoskedastisch)
iii) Kovarianz: $E[v_t v_s] = 0 \quad t \neq s$ unkorreliert

2.) **Hypothese:**

$$H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho > 0$$

$(d =)0.796 < (d_L^* =)1.100 < (d_U^* =)1.537 \implies$ Lehne H_0 ab auf 5% SN ab, die Fehlerterme sind auf 5% SN positiv autokorreliert.

3.) $\rho = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}\hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^{20} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{20} \hat{e}_t^2 - \hat{e}_T^2} = \frac{23.65}{51.26-10.89} = \frac{23.65}{40.361} = 0.586$ - positive Autokorrelation.

4.) **Hypothese:**

$$H_0 : \rho = 0, \qquad vs. \qquad H_1 : \rho < 0$$

Bestimmung der Teststatistik und der kritischen Werte
Entscheidung:
$4 - d_U^* < 4 - d_L^* < d \Longrightarrow$ lehne H_0 ab.
$4 - d_U^* < d < 4 - d_L^* \Longrightarrow$ uneindeutig
$d < 4 - d_U^* < 4 - d_L^* \Longrightarrow$ lehne H_0 nicht ab.

5.) (a) $d = 1.840187$, wenn T groß ist kann man den ρ-Wert approximieren:
$d \approx 2 - 2\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho} \approx 1 - \frac{d}{2} \approx 1 - \frac{1.840187}{2} \approx 0.08$

(b) Als Alternativhypothese wäre hier $\rho > 0$ sinnvoll, weil d (Durbin-Watson Teststatistik) zwischen 0 und 2 liegt. Je mehr d sich dem Wert Null nähert, um so stärker werden die Anzeichen für positive Autokorrelation.
Hypothese:

$$H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho > 0$$

Kritische Werte $T = 20 \quad K = 3 \quad \alpha = 0.05 \quad d_L^* = 1.748 \quad d_U^* = 1.789$
$(d =)1.840187 > (d_U^* =)1.789 > (d_L^* =)1.748 \longrightarrow$ lehne H_0 nicht ab, die Fehlerterme sind auf einem 5% SN nicht korreliert.

Kritische Werte $T = 20 \quad K = 10 \quad \alpha = 0.05 \quad d_L^* = 1.675 \quad d_U^* = 1.863$
$(d_U^* =)1.863 > (d =)1.840187 > (d_L^* =)1.675 \longrightarrow$ für 10 Regressoren kann das Ergebnis nicht gedeutet werden.