Lösung Klausur 2003 / 2. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1.) $b = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix} \Longrightarrow \beta_2$ lässt sich nicht als Elastizität interpretieren, weil y_t und x_{l2} nicht logarithmiert sind.

2.) $\widehat{\sigma}^2 = \frac{y'y-b'X'y}{T-K} = \frac{0.5-0.456}{30-2} = 0.0015714286$

3.) $\sum = \widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0000785 & -0.000157 \\ -0.000157 & 0.000942 \end{bmatrix}$

4.) $R^2 = \frac{b'X'y-T\overline{y}^2}{y'y-T\overline{y}^2} = \frac{0.456-0.432}{0.5-0.432} = \frac{0.024}{0.068} = 0.35294 \Longrightarrow 35\%$ der Varianz von y_t kann durch das Regressionsmodell erlärt werden.

5.) - X muss nicht stochastisch sein
- $rk(X) = K$ oder (X muss eine reguläre Matrix sein)

6.) $\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \Longrightarrow$ BUE (Best Unbiased Estimator), Erwartungstreu, Konsistent, eine lineare Funktion von y
$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{(y-X\widetilde{\beta})'(y-X\widetilde{\beta})}{T} \Longrightarrow$ Maximum-Likelihood-Schätzer für σ^2 ist verzertt.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1.) $H_o : \beta_k = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_k \neq 0$
Variablen die auf 5% S.N signifikant sind ($prob < \alpha$): DPROD, DP, DU.
Variablen die auf 1% S.N signifikant sind ($prob < \alpha$): DPROD, DP.
Weil das Signifikanzniveau steigt, sind die Ablehnungsbereiche kleiner geworden. Deswegen können wir die Nullhypothese nicht so oft wie früher ablehnen.

2.) $H_0 : \beta_{DP} \leq 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{DP} > 0$
$\frac{prob}{2} = \frac{0.0447}{2} = 0.02235 > 0.01 \quad \Longrightarrow \quad$ Lehne H_0 auf einem 1% SN nicht ab.
Auf 2.235% Signifikanzniveau würden wir die Nullhypothese $H_0 : \beta_{DP} \leq 0$ gerade noch annehmen.

3.) Konfidenzintervalschätzung für β_{DPROD} ($t = 2.617$):
$[0.3883 \leq \beta_{DPROD} \leq 1.0631] = 1 - 0.01$
$\Longrightarrow$ Auf 1% Signifikanzniveau liegt 1 in diesem Konfidenzinterval. Deswegen lehnen wir die Nullhypothese $\beta_{DPROD} = 1$ auf einem 1% Signifikanzniveau nicht ab.

Ökonomische Interpretation: Es gibt eine eins zu eins Beziehung zwischen der Wachstumsrate der Nominallöhne und der Wachtumsrate der Arbeitsproduktivität.

4.)

$$\begin{aligned}
H_0 &: \beta_{DP} = \beta_{DU} = 0 \\
R\beta - r &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
R\widetilde{\beta} - r &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.227183 \\ 0.725703 \\ 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R' &= \begin{bmatrix} 0.009812 & -0.005243 \\ -0.005243 & 0.057180 \end{bmatrix} \\
\left[\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.009812 & -0.005243 \\ -0.005243 & 0.057180 \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

$F_{[2,104],0.05} \approx 3.10 \longrightarrow 5.8861901 > 3.10 \Longrightarrow$ Lehne H_0 ab auf 5% Signifikanzniveau.

5.) $H_0 : \beta_{DPROD} = \beta_{DP} = \beta_{DU} = 0$
Lehne H_0 ab, falls $prob(F - statistik) < \alpha \longrightarrow 0.00000 < 0.05$ Die Variablen sind gemeinsam signifikant. Lehne H_0 ab.

Unter H_0 folgt die Teststatistik einer F-Verteilung.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1a.) $y_1 \Rightarrow (T_1 \times 1)$, $y_2 \Rightarrow (T_2 \times 1)$, $X_1 \Rightarrow (T_1 \times K)$, $X_2 \Rightarrow (T_2 \times K)$

1b.) Φ ist eine Diagonalmatrix. Die Inverse einer Diagonalmatrix, ist die Inverse der Elemente auf der Diagonalen.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_T & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_T \end{bmatrix} \qquad \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} I_T & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} I_T \end{bmatrix}$$

1c.) $(X'\Phi^{-1}X) = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} I_{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left[\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2}\right]$

1d.) $(X'\Phi^{-1}y) = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} I_{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2}\right]$

$\widehat{\beta} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}(X'\Phi^{-1}y) = \left[\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2}\right]^{-1} \left[\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2}\right]$

1e.) **Computeraufgabe:** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad vs \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$(\lambda = \frac{(0{,}942415)^2}{(0.527982)^2} = \frac{0.888146}{0.278765}) = 3.186 > 1.53(= F_{(64-4,44-4),0.05}) \implies$ Lehne H_0 ab auf 5% Signifikanzniveau. Die Varianzen sind nicht identisch.

2a.)

$$\begin{aligned} \widehat{e}_2 &= \rho\widehat{e}_1 + \upsilon_2 \\ \widehat{e}_3 &= \rho\widehat{e}_2 + \upsilon_3 \\ &\vdots \\ \widehat{e}_T &= \rho\widehat{e}_{T-1} + \upsilon_T \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_3 \\ \vdots \\ \widehat{e}_T \end{bmatrix}}_{y_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix}}_{X_e} \rho + \underbrace{\begin{bmatrix} \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \\ \vdots \\ \upsilon_T \end{bmatrix}}_{\upsilon}$$

2b.) $X_e' X_e = \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \cdots & \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{T-1} \widehat{e}_t^2 = \sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_{t-1}^2$, $(X_e' X_e)^{-1} = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_{t-1}^2}$,

$X_e' y_e = \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \cdots & \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_3 \\ \vdots \\ \widehat{e}_T \end{bmatrix} = \sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_t \widehat{e}_{t-1}$, $\widehat{\rho} = (X_e' X_e)^{-1} X_e' y_e = \frac{\sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_t \widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_{t-1}^2}$

2c.) **Computeraufgabe:**Durbin Watson Test $\Rightarrow$ Teststatistik $d = 2.076952$
kritische Werte: $T = 108, \qquad K = 4, \qquad \alpha = 0.05, \qquad d_L^* \approx 1.613, \qquad d_U^* \approx 1.736$

Hypothese: $H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho > 0$
$2.076952 > 1.736 \Rightarrow d > d_U^* \implies$ lehne H_0 nicht ab auf 5% Signifikanzniveau.

Hypothese: $H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho < 0$
$2.076952 < 2.264 \Rightarrow d < 4 - d_U^* \implies$ lehne H_0 nicht ab auf 5% Signifikanzniveau.