Lösung Klausur 2004 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. $b = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} 3.10 \\ -0.8 \end{bmatrix}$

2. $$\frac{\partial y}{\partial x_{t2}} = \beta_2 \simeq b_2 \text{ Marginale Änderung}$$

   Wenn der durchschnittlicher Preis des Tees um eine Einheit steigt, sinkt der Teekonsum um 0.8 Einheiten.

3. $\widehat{\sigma}^2 = \frac{y'y-b'X'y}{T-K} = \frac{49-48.74}{8} = 0.0325$

4. $R^2 = \frac{b'X'y-T\overline{y}^2}{y'y-T\overline{y}^2} = \frac{48.74-(10\cdot 4.5796)}{49-(10\cdot 4.5796)} = \frac{2.944}{3.204} = 0.91885144$
   $1 - R^2 = 1 - 0.91885144 = 0.081148560 \quad \Longrightarrow \quad 8.115\%$ der Varianz der Teekonsums wird nicht durch das lineare Regressionsmodell erklärt.

5. $y_{2000} = X_{2000}b = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.10 \\ 0.8 \end{bmatrix} = 3.10 - 0.8 \cdot 1.5 = 1.9$

6. $$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{T}, \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{\widehat{e}'\widehat{e}}{(T-K)}, \quad \widehat{e}'\widehat{e} = \widehat{\sigma}^2(T-K) \\ \widetilde{e}'\widetilde{e} &= \widehat{e}'\widehat{e} \\ \frac{\tilde{\sigma}^2 T}{\sigma^2} &= \frac{\frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{T}T}{\sigma^2} = \frac{\widetilde{e}'\widetilde{e}}{\sigma^2} \\ &= \frac{\widehat{e}'\widehat{e}}{\sigma^2} = \frac{\widehat{\sigma}^2(T-K)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

7. $b_1 = \left(\sum_{t=1}^{10} x_{t2}^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{10} y_t x_{t2} = \frac{\sum_{t=1}^{10} y_t x_{t2}}{\sum_{t=1}^{10} x_{t2}^2} = \frac{22}{19} = 1.1578947$
   Interpretation: Aus ökonomischen Gründen würde man das erste Modell (Modell mit der Konstanten $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + e_t$) bevorzugen, weil der geschäzte β_2 Koeffizient für dieses Modell ein negatives Vorzeichen hat. b_2 für das zweite Modell ($y_t = \beta_2 x_{t2} + e_t$) ist positiv. Weil zwischen dem Preis eines Produkts und der Nachfrage dieses Produkts eine negative Beziehung geben sein sollte, bevorzugen wir das Modell mit der Konstanten.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1.) $H_0 : \beta_K = 0 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_K \neq 0$
   $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{T-K} = \frac{y'y-b'X'y}{T-K} = 60 - \frac{\begin{bmatrix} 1.4 & 0.2 & -1.8 \end{bmatrix}}{10-3} \begin{bmatrix} 7 & -7 & -26 \end{bmatrix} = 0.6857$

$t = \frac{\beta_K}{\hat{\sigma}\sqrt{a^{KK}}} \sim t_{(T-K,\alpha/2)} \longrightarrow \quad t_2 = \frac{0.2}{\sqrt{0.6857 \cdot 0.07}} = 0.9129 \longrightarrow \quad t_3 = \frac{-1.8}{\sqrt{0.6857 \cdot 0.08}} = -7.6853$
$t_{7,2.5\%} = 2.365$
$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_2 nicht ab, da $|t_2| = 0.9129 < 2.365 (= t_{7,2.5\%})$
$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_3 ab, da $|t_3| = 7.6853 > 2.365 (= t_{7,2.5\%})$

2.) $H_0 : R\tilde{\beta} = r \quad$ vs. $\quad H_1 : R\tilde{\beta} \neq r$

$$R\tilde{\beta} = r \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.2 & -1.8 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 0.07 & -0.04 \\ -0.04 & 0.08 \end{bmatrix}^{-1}}{2 \cdot 0.6857} \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.8 \end{bmatrix} = 36.6778 \longrightarrow \quad F_{(J,T-K,5\%)} = F_{2,7,5\%} = 4.74$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 für β_2 und β_3 ab, da $|\lambda| = 36.6778 > 4.74 (= F_{2,7,5\%})$ (β_2 und β_3 sind gemeinsam signifikant)

3.) $H_0 : R \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} = 0 \quad$ vs. $\quad H_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta} \neq 0$

$$\lambda = \frac{(-0.2)(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(-0.2)}{0.6857} = 0.4861 \longrightarrow \quad F_{(1,7,5\%)} = 5.59$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 nicht ab, da $\lambda = 0.4861 < 5.59 (= F_{(1,7,5\%)})$

4.) $\sigma^2 = 0.7 \quad \longrightarrow$ das 95%-KI für β_3:

$$\begin{aligned} [-1.8 \overset{+}{-} z_{2.5\%} \cdot \sqrt{0.7 \cdot 0.08}] &= 1 - \alpha \\ [-2.2638, \quad -1.336] &= 0.95 \end{aligned}$$

Hypothesentest: $H_0 : \beta_3 \leq -2.2 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_3 > -2.2$

$$\lambda = \frac{-1.8 + 2.2}{\sqrt{0.7 \cdot 0.08}} = 1.6903 \quad Z_{(5\%)} = 1.645$$

$\Longrightarrow$ Lehne H_0 ab, da $\lambda = 1.6903 > 1.645 (= F_{(1,7,5\%)})$
$\Longrightarrow$ $\alpha = 50\% + \alpha^*$ muss so gewählt werden, dass H_0 gerade noch angenommen wird:
$z_{\alpha_*} = 1.6903 \qquad \alpha^* = 1 - 0.4545$
$\Longrightarrow$ nimm bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 4.55\%$ H_0 gerade noch an.

5.) a) Wenn $Prob_K < \alpha$, dann lehne $H_0 : \beta_K = 0$ ab $\Longrightarrow$ somit sind die Variablen x_2, x_3, C auf 1% SN signifikant

b) $H_0 : \beta_4 = -2 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_4 \neq -2$
$t_4 = -0.876377 + 2/0.896924 = 1.2527 \quad t_{(23-19,2.5\%)} \approx 2$
$\Longrightarrow$ Lehne H_0 nicht ab, da $t_4 = 1.2527 < 2 (= t_{(4,2.5\%)})$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1.) a) für $T = 6$ und $K = 2$, $d = 0.449687$ $\quad d_L^* = 0.61$ $\quad d_U^* = 1.4$ $\quad \Longrightarrow$ Lehne H_0 auf 5% SN ab.

b) (i) $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2} = \frac{0.0591}{0.1301} = 0.4542$

(ii)

$$\begin{aligned} E[b] &= E[(X'X)^{-1}X'y] = E[(X'X)^{-1}X'X\beta] + E[(X'X)^{-1}X'e] \\ &= E[\beta] + (X'X)^{-1}X' \underbrace{E[e]}_{=0} = \beta \end{aligned}$$

2.) a)

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 33.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 35.59 \\ 179.63 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 33.5 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35.59 \\ 175.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4673 \\ 4.4426 \end{bmatrix} \\ COV[\hat{\beta}] &= \hat{\sigma}_y^2 (X'\Psi^{-1}X)^{-1} = 1 \cdot \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 33.5 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Daraus folgt, dass $\sum^{b} - \sum^{\hat{\beta}}$ eine positiv definite Matrix ist und damit $\hat{\beta}$ effizienter als b. Mit dem Gaus-Markov-Theorem kann man außerdem zeigen, dass es keinen kleineren Schätzer als $\sum^{\hat{\beta}}$ in der Klasse der linearen Schätzer gibt. Bei Annahme der Normalverteilung gibt es überhaupt keinen $\Longrightarrow$ Cramer Lao.