Lösung Klausur 2006 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

2. Mit $X'X = \begin{bmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 310 \end{bmatrix}$ und $X'y = \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix}$ folgt

   $$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{10 \cdot 310 - 50^2} \begin{bmatrix} 310 & -50 \\ -50 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix} = \frac{1}{600} \begin{bmatrix} 3400 \\ 1720 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix}$$

3. $R^2 = \dfrac{b'X'y - T(\bar{y})^2}{y'y - T(\bar{y})^2}$

   - $b'X'y = \frac{1}{600} [3400 \quad 1720] \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix} = \frac{2695840}{600} = 4493.067$
   - $T\bar{y}^2 = \frac{1}{T}\left(\sum y_t\right)^2 = \frac{1}{10} 200^2 = 4000$

   $$\Longrightarrow R^2 = \frac{4493.067 - 4000}{4558 - 4000} = 0.884$$

   88,4% der Variabilität von y_t werden durch das lineare Regressionsmodell erklärt.

4. BUE (und nicht nur BLUE)

5. $\hat{y}_0 = x_0'\widetilde{\beta} = [1 \quad 5.5] \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix} = 21.433$

6. Mit $\quad x_0'\widetilde{\beta} = 21.433, \quad \sigma^2 = 7, \quad z_{(97.5\%)} = 1.96 \quad$ und

   $$\begin{aligned} x_0'(X'X)^{-1}x_0 &= [1 \quad 5.5] \frac{1}{600} \begin{bmatrix} 310 & -50 \\ -50 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{62.5}{600} = 0.104 \end{aligned}$$

   folgt

   $$\begin{aligned} \Longrightarrow PI_{y_0}[95\%] &= \left[21.433 \pm 1.96\sqrt{7}\sqrt{0.104 + 1}\right] \\ &= [15.985; 26.882] \end{aligned}$$

7. Punkt- vs. Intervallschätzung: Intervallschätzung enthält Informationen über die Unsicherheit bzw. liefert eine Genauigkeitseinschätzung der Punktschätzung.

8. $E[\hat{e}_0] = E[\hat{y}_0 - y_0] = E\left[x_0'(\widetilde{\beta} - \beta) + e_0\right] = x_0' \underbrace{E\left[\widetilde{\beta} - \beta\right]}_{=E\left[\widetilde{\beta}\right] - \beta = 0} + E[e_0] = 0$, da $\hat{\beta}$ erwartungstreu.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1. LNL und LNK üben einen signifikanten Einfluss aus, weil die prob-Werte zu Tests von $H_0 : \beta_{LNL} = 0$ bzw. $H_0 : \beta_{LNK} = 0$ kleiner als das Signifikanzniveau 0.10 sind.

2. Nullhypothese

$$H_0 \quad : \quad \beta_{LNL} + \beta_{LNK} = 1 \Leftrightarrow R\beta = r$$

mit $\beta = (\beta_C \ \beta_{LNL} \ \beta_{LNK} \ \beta_{LNL2} \ \beta_{LNK2} \ \beta_{LNLLNK})'$, $R = [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$ und $r = 1$.

Das heisst, wir müssen entweder einen F-Test oder t-Test durchführen, weil die Fehlervarianz unbekannt ist.

<u>F-Test</u>

$$R\widetilde{\beta} = [3.503118 - 1.848961] = 1.6541570$$

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R' &= \widehat{\sigma}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (X'X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0.999976 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\left(R\widetilde{\beta} - r\right)^2}{\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R'} = \frac{(1.6541570 - 1)^2}{0.999976} = \frac{0.42792138}{0.999976} = 0.428$$

Entscheidung: $\lambda = 0.428 \leq 4.38 = F_{(1,19),0.05} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

Alternativ kann ein <u>T-test</u> durchgeführt werden.

$$t = \frac{1.6541570 - 1}{\sqrt{0.999976}} = 0.654164$$

Entscheidung: $|t| = |0.654164| \leq 2.093 = t_{(25-6),0.025} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

3. 95% Konfidenzintervall für β_{LNK}

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{\beta}_{LNK} \pm t_{(T-K),\alpha/2}\widehat{\sigma}_{\widetilde{\beta}_{LNK}}\right] &= \left[\widetilde{\beta}_{LNK} \pm t_{(19),0.025}\widehat{\sigma}_{\widetilde{\beta}_{LNK}}\right] \\ [-1.848961 \pm 2.093 * 0.942903] &= [-3.822457, 0.124535] \end{aligned}$$

4. Hypothese

$$H_0 : \beta_{LNL} \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{LNL} > 1$$
$$\alpha = 0.05 \qquad \sigma^2 = 0.04$$

Also, einseitiger z-Test, σ^2 bekannt und nur eine Restriktion unter H_0. Der Wert der Teststatistik berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}}{\sigma_{\widetilde{\beta}_{LNL}}} = \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}}{\sigma\sqrt{(X'X)^{-1}_{3,3}}} = \frac{\widehat{\sigma}\left(\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}\right)}{\sigma\sqrt{\widehat{\sigma}^2\,(X'X)^{-1}_{3,3}}} \\ &= \frac{3.503118 - 1}{\sqrt{0.04\frac{1.517274}{0.166179}}} = 1.371 \end{aligned}$$

Entscheidung: $z = 1.371 \leq 1.645 = z_{0.05} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

Wir würden H_0 gerade noch annehmen, falls $z = z_\alpha$ wäre.

$$\begin{aligned} z &= 1.37 \overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} 0.4147 = 0.5 - \alpha \\ &\Rightarrow \alpha = 0.5 - 0.4147 = 0.085 \end{aligned}$$

Damit würden wir H_0 auf dem 8.5% Signifikanzniveau gerade noch 'annehmen'.

5.

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta_{LNL2} = \beta_{LNK2} = \beta_{LNLLNK} = 0 \\ H_0 &: R\beta = r \quad vs. \quad H_1 : R\beta \neq r \end{aligned}$$

$$R\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_C \\ \beta_{LNL} \\ \beta_{LNK} \\ \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=r}$$

$$R\widetilde{\beta} - r = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{LNL2} \\ \tilde{\beta}_{LNK2} \\ \tilde{\beta}_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.717325 \\ 0.205185 \\ 0.144424 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\begin{bmatrix} -0.717325 & 0.205185 & 0.144424 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.176 & 2.105 & 3.002 \\ 2.105 & 5.720 & 6.580 \\ 3.002 & 6.580 & 8.563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.717325 \\ 0.205185 \\ 0.144424 \end{bmatrix}}{3 * (0.166179)^2} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0.02190173 & 0.61399899 & 0.43341036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.717325 \\ 0.205185 \\ 0.144424 \end{bmatrix}}{0.082846380} = \frac{0.17287603}{0.082846380} = 2.086 \end{aligned}$$

Entscheidung: $\lambda = 2.09 \leq 3.13 = F_{(3,19),0.05} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

Interpretation: Man kann eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion statt eine Translog-Produktionsfunktion nehmen.

6. $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ oder $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.

7. Falsch. Fehler 1. Art ist die Ablehnung der Nullhypothese, obwohl sie richtig ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1. a) Falls $\rho = 0$, da dann $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ und somit die Standardannahmen gelten.

b) Durbin-Watson-Test: $d = \dfrac{\sum_{t=2}^{30}(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{30}\hat{e}_t^2}$

$$\sum_{t=1}^{30}\hat{e}_t^2 = \sum_{t=2}^{30}\hat{e}_{t-1}^2 + \hat{e}_{30}^2$$
$$d = 75.71/(27.74+0.1) = 2.719$$

Hypothese: $H_0 : \rho \geq 0 \quad vs. \quad H_1 : \rho < 0$

$$\left.\begin{aligned} \bar{d} = 4 - d &= 1.281 \\ d_U &= 1.489 \\ d_L &= 1.352 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{d} < d_L \Rightarrow \text{Lehne } H_0 \text{ ab.} \Rightarrow \text{Autokorrelation ist signifikant negativ.}$$

c) Es gibt 2 Möglichkeiten, ρ zu schätzen

i. $\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2}d = -0.360$ (mit DW-Statistik)

ii. $\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{T}\hat{e}_t\hat{e}_{t-1} / \sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{t-1}^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{30}(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 &= \sum_{t=2}^{30}\hat{e}_t^2 - 2\sum_{t=2}^{30}\hat{e}_t\hat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30}\hat{e}_{t-1} \\
&= 2\sum_{t=2}^{30}\hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - 2\sum_{t=2}^{30}\hat{e}_t\hat{e}_{t-1} \\
\sum_{t=2}^{30}\hat{e}_t\hat{e}_{t-1} &= \frac{2\sum_{t=2}^{30}\hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - \sum_{t=2}^{30}(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{2} \\
&= (2 \times 27.74 - 0.2 + 0.1 - 75.71)/2 \\
&= -10.165 \\
\Rightarrow \hat{\rho} &= -10.165/27.74 = -0.366
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\rho}$ kann $\hat{\Psi}$ bestimmt werden. Damit kann der FGLS-Schätzer $\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Psi}^{-1}y$ bestimmt werden.

2.

$$\begin{aligned}
E(e_t) &= E(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t) = 0.5\sqrt{x_{t2}}E(u_t) = 0 \\
E(e_t^2) &= E(0.25x_{t2}u_t^2) = 0.25x_{t2}E(u_t^2) = 0.25x_{t2}\sigma^2 \\
E(e_te_s) &= E(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t0.5\sqrt{x_{s2}}u_s) = 0.25\sqrt{x_{t2}}\sqrt{x_{s2}}E(u_tu_s) = 0
\end{aligned}$$

a)

$$E(ee') = \sigma^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{x_{12}}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_{22}}{4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{x_{T2}}{4} \end{bmatrix}}_{\Psi}, \qquad e \sim N(0, \sigma^2\Psi))$$

b) GLS-Schätzer, dieser ist BUE (bester unverzerrter Schätzer), da $e \sim N(0, \sigma^2 \Psi))$

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{x_{12}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{x_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{\sqrt{x_{T2}}} \end{bmatrix}$

3. $H_0 : \sigma_I^2 \leq \sigma_{II}^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_I^2 > \sigma_{II}^2$

   $\lambda = \dfrac{0.462^2}{0.370^2} = 1.559$

   a) $F_{(45-5,45-5),0.05} = 1.69$

      Verwerfe H_0 nicht, Varianzen nicht unterschiedlich

   b) OLS, falls H_0 abgelehnt werden würde: FGLS