Lösung Klausur 2004 / 2. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1) $b = \begin{bmatrix} -0.75862069 \\ 0.87068966 \end{bmatrix}$

2) b_2 beschreibt die Input-Output Elastizität, d.h. wenn der Input um 1% steigt, steigt der Output um 0.87%

3) $\hat{\sigma}^2 = \frac{y'y - b'X'y}{T-K} = \frac{19.96 - 17.129310}{15-2} = 0.21774536$

4) $\hat{\sigma}_{b_2} = \hat{\sigma}\sqrt{(X'X)^{-1}_{2,2}} = \sqrt{0.21774536} \cdot \sqrt{0.12931034} = 0.16779966$

5) $R^2 = \frac{b'X'y - T(\bar{Y})^2}{y'y - T(\bar{y})^2} = \frac{17.129310 - 15(13/15)^2}{19.96 - 15(13/15)^2} = 0.67438386$

6) $\hat{y}_0 = X_0 b = \begin{bmatrix} 1 & ln10 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 & 2.3025851 \end{bmatrix} b = 1.2462163$

7) KQ $e \sim (0, \sigma^2 I_T)$
ML $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$

8) $X'\hat{e} = X'(y - \hat{y}) = X'y - X'\hat{y} = X'y - X'Xb = X'y - \underbrace{X'X(X'X)^{-1}}_{I_K} X'y = 0$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1) $H_0 : \beta_K = 0 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_K \neq 0 \quad \alpha = 0.05$

(a) Folgende Variablen sind auf dem 1% SN signifikant ($prob < \alpha$): MEALP, ENGP, AVGINC, C.

(b) STR ist zum Niveau 1.46% gerade noch signifikant.

2) $H_0 : \beta_{STR} \leq -0.7 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_{STR} > -0.7 \quad \alpha = 0.05$

$t = 0.611 < 1.645 (= t_{(420-5),0.05} \sim z_{0.05}) \Longrightarrow$ lehne H_0 nicht ab.

3) $H_0 : \beta_{STR} + \beta_{AVGINC} = 0 \quad$ vs. $\quad H_1 : \beta_{STR} + \beta_{AVGINC} \neq 0 \quad \alpha = 0.05$

Im Fall $J = 1$: $R\beta = r \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = 0$

$\lambda = 0.1925 < 3.84 (= F_{(1;\infty;0.05)}) \Longrightarrow$lehne H_0 nicht ab.

4) (a) $\left\{\tilde{\beta}_{ENGP} \pm t_{(T-K,0.025)}\hat{\sigma}_{\beta_{ENGP}}\right\} = 1 - 0.05$ $\Longrightarrow$ -0.3 liegt nicht im Konfidenzintervall für $\tilde{\beta}_{ENGP}$ auf 5% Signifikanzniveau, deswegen wird H_0 abgelehnt;

$\{-0.194328 \mp 1.96 \cdot 0.031380\} = 0.95$

$\{-0.1328232, -0.2558328\} = 0.95$

(b) $H_0 : \beta_{ENG} = -0.3 \quad H_1 : \beta_{ENG} \neq -0.3 \quad \alpha = 0.1$

Ein 90% Konfidenzintervall für β_{ENG} wird enger als das 95% Konfidenzintervall. Da bereits das KI 95% -0.3 nicht beinhaltet wird somit auch das KI 90% diesen Wert $H_0 : \beta_{ENG} = -0.3$ nicht umfassen. H_0 wird abgelehnt.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1) Nein, die Varianz verändert sich im Zeitablauf.

2) (a) $b = \left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t y_t = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \Longrightarrow$ unverzerrt

(b) GLS-Schätzer ist BLUE: $\hat{\beta} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y$

(c) Der Schätzer ist BUE, weil normalverteilte Fehlerterme vorliegen.

(d)

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x_T^2 \end{bmatrix}_{(T\times T)} \Longrightarrow \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} x_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x_T^{-2} \end{bmatrix}_{(T\times T)}$$

$$\Phi^{-1} = PP' \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_T} \end{bmatrix}_{(T\times T)}$$

(e) $\hat{\beta}_{GLS} = \left[\frac{x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_2^2} + \ldots + \frac{x_T^2}{x_T^2}\right]^{-1} \left[\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \ldots + \frac{y_T}{x_T}\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{x_t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{x_t} \cdot \frac{1}{T}$

(f) $\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{x_t} \cdot \frac{1}{T} = (-7 - 6 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{6}{8} + \frac{9}{10})\frac{1}{7} = -\frac{13}{7} = -1.8571429$

(g) $Var(\hat{\beta}) = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}\hat{\sigma}_g = \frac{1}{T} = \frac{1}{7} = 0.14285714$

3) $H_0 : \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2$ vs. $H_1 : \sigma_I^2 < \sigma_{II}^2$ $\alpha = 0.05$

$\lambda (= \frac{677.2701}{7-3} / \frac{200.6870}{13-3} = \frac{169.31752}{20.068700}) = 8.437 > 3.48 (= F_{[4,10]}) \Longrightarrow$ lehne H_0 ab (Heteroskedastizität liegt vor).