Lösung Klausur 2006 / 2. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. Online-Druckerei:

   (a)
$$X'X = \begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 82 \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{3200}\begin{bmatrix} 82 & -30 \\ -30 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025625 & -0.009375 \\ -0.009375 & 0.015625 \end{bmatrix}$$
$$X'y = \begin{bmatrix} 400 \\ 160 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8.75 \\ -1.25 \end{bmatrix}, \quad b'X'y = 3300$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y'y - b'X'y)}{(T-K)} = 2.0833, \quad R^2 = \frac{b'X'y - T\bar{y}^2}{y'y - T\bar{y}^2} = 0.5$$
   50 % der Varianz des Absatzes werden durch das Regressionsmodell erklärt.

   (b) $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$

   (c) b_1 ist maximaler Absatz der vom linearen Modell impliziert wird, falls der Preis 0 wäre. b_2 ist die Preis-Semielastizität des Absatzes. Wenn der Preis um ein Cent steigt, sinkt der Absatz um 1.25%.

   (d) Der Preis für 10 Fotos steigt um 10 Cent. Unter Verwendung der Semielastizität: Absatz sinkt um 12.5%.

   (e)
$$\hat{\Sigma}_b = 2.0833 \begin{bmatrix} 0.025625 & -0.009375 \\ -0.009375 & 0.015625 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{b_2} = 0.032552$$

2. Cobb-Douglas:

   (a)
$$\frac{Q_t}{L_t} = \alpha \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\beta} e^{\epsilon_t}$$
   Das Modell kann in dieser Form nicht mit der einfachen KQ-Methode geschätzt werden, da es nicht linear in den zu schätzenden Parametern ist.

   (b)
$$\log \frac{Q_t}{L_t} = \log \alpha + \beta \log \frac{K_t}{L_t} + \epsilon_t$$
$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \epsilon_t$$

   (c) abhängige Variable:
$$y_t = \log \frac{Q_t}{L_t}$$
   Regressormatrix:
$$X = \left[1 \quad \log \frac{K_t}{L_t}\right]_{t=1,\ldots,T}$$
$$\alpha = e^{\beta_1}, \quad \beta = \beta_2, \quad \gamma = 1 - \beta_2$$

Aufgabe 2

1.
   - $C, X2, X4, X5$
   - Eine Variable X_k wird als *signifikant* bezeichnet, wenn der zweiseitige Test die Nullhypothese $H_0 : \beta_k = 0$ auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau verwirft.

2. $\alpha = 0.2336$

3.
   - $KI_{95\%}(\beta_4) = [\underbrace{\tilde{\beta}_4}_{=-2.744} \pm \underbrace{\underbrace{t_{(97.5,126-6)}}_{=1.980}\underbrace{\hat{\sigma}\sqrt{(X'X)^{-1}_{4,4}}}_{\approx 0.01}}_{=0.198}] = [-2.942; -2.546]$
   - Testentscheidung: $\beta_4 = -2.7 \in KI_{95\%}(\beta_4) \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen!

4. $H_0 : \beta_2 = \ldots = \beta_6 = 0 \Leftrightarrow H_0 : R\beta = r$ mit

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Teststatistik: $\lambda = \frac{(R\tilde{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta}-r)}{J\hat{\sigma}^2} \sim F_{(J,T-K)} = F_{(5,120)}$ unter H_0.

   Da der p–Wert für die F–Statistik laut EVIEWS < 0.05, wird H_0 verworfen. Alle Variablen sind also gemeinsam signifikant.

5.
   - $H_0 : R\beta = r$ mit $R = [0\ 4\ 0\ 0\ -1\ 0]$ und $r = 0$.
   - $\text{Rang}(R) = 1 = J$
   - $R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R' =$

$$[0\ 4\ 0\ 0\ -1\ 0] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.082 & \cdot & \cdot & -0.00214 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -0.00214 & \cdot & \cdot & 0.039 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.333$$

   $\Rightarrow$ Wert der Teststatistik λ (vgl. 4.):

$$\lambda = (R\tilde{\beta})'[R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta}) = \frac{(4\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_5)^2}{[R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']}$$
$$= \frac{(4 \times 0.616 - 3.959)^2}{1.333} = \frac{(-1.495)^2}{1.333} = 1.677$$

   - Kritischer Wert: $F_{(1,120,0.95)} = 3.92$
     $\Rightarrow$ Testentscheidung: H_0 nicht verwerfen!

6.
   - Da σ^2 unbekannt ist, sind die t–Statistiken nicht normal–, sondern t–verteilt.
   - Die Teststatistik für den Test auf gemeinsame Signifikanz mehrerer Koeffizienten ist nur unter der Normalverteilungsannahme der Fehler F–verteilt.
   - Außerdem sind die Freiheitsgrade der F–Statistik J und $T-K$ und nicht $T-K$ und J.

7. $Var[e_t] = \sigma^2$
   $Var[y_t] = Var[x'_{(t)}\beta + e_t] = Var[e_t] = \sigma^2$
   $Var[\hat{\beta}_2] = \sigma^2(X'X)^{-1}_{22}$
   Die Schätzung von β_2 wird unsicherer, je größer die Fehlervariabilität ($\sigma^2 \uparrow \Rightarrow Var[\hat{\beta}_2] \uparrow$).

8. Die Varianz des Schätzers $\hat{\beta}_2$ ist $Var[\hat{\beta}_2] = \sigma^2(X'X)^{-1}_{22}$, also nicht zufällig. Jedoch der Schätzer der Varianz von $\hat{\beta}_2$, gegeben durch $\widehat{Var[\hat{\beta}_2]} = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}_{22}$, ist zufällig.

Aufgabe 3

1.

$$\begin{aligned} E[e^*] &= E[Pe] = PE[e] = 0 \\ E[e^*e^{*'}] &= E[Pee'P'] = P\underbrace{E[ee']}_{=\sigma^2\Psi}P' = \sigma^2\underbrace{P\Psi P'}_{=I_T} = \sigma^2 I_T, \end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung ist $E(ee') = \sigma^2\Psi$ und $P'P = \Psi^{-1}$.

$$\Rightarrow (P'P)^{-1} = \Psi \Rightarrow P^{-1}(P')^{-1} = \Psi \Rightarrow I_T = P\Psi P'$$

2. (a) Hypothese: ($\sigma_I^2, \sigma_{II}^2$ bezeichnen die Fehlervarianzen der armen bzw. reichen Staaten.)

$$H_0 : \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_{II}^2 > \sigma_I^2$$

Teststatistik

$$\lambda = \frac{\widehat{\sigma}_{II}^2}{\widehat{\sigma}_I^2} = \frac{(76.00106)^2}{(47.23476)^2} = \frac{5776.161}{2231.122} = 2.59 \underset{H_0}{\sim} F_{[(17-2),(18-2)]}$$

$\Rightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau ab (es liegt also Heteroskedastizität vor), da $2.59 > F_{(15,16)}^{0.95} = 2.35$.

(b)

$$Cov(e) = E[ee'] = \begin{bmatrix} \sigma_I^2 I_{18} & \mathbf{0}_{(18\times 17)} \\ \mathbf{0}_{(17\times 18)} & \sigma_{II}^2 I_{17} \end{bmatrix}, \quad \widehat{Cov(e)} = E[ee'] = \begin{bmatrix} 2231.122 I_{18} & \mathbf{0}_{(18\times 17)} \\ \mathbf{0}_{(17\times 18)} & 5776.161 I_{17} \end{bmatrix}$$

(c) FGLS Methode (Modell mit zwei Gruppenvarianzen $\sigma_I^2, \sigma_{II}^2$), d.h. ersetze in Formel für GLS-Schätzer σ_I^2, σ_{II}^2 durch ihre Schätzungen:

$$\widehat{\widehat{\beta}} = \left(\frac{X_I'X_I}{\widehat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}'X_{II}}{\widehat{\sigma}_{II}^2}\right)^{-1} \left(\frac{X_I'y_I}{\widehat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}'y_{II}}{\widehat{\sigma}_{II}^2}\right)$$

3. (a)

$$\widehat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2 - \widehat{e}_T^2} = \frac{0.12}{0.7 - 0.045} = 0.18$$

(b) Hypothese: $\quad H_0 : \rho = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \rho > 0$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^T (\widehat{e}_t - \widehat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t^2 - 2\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^T \widehat{e}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2} \\ &= \frac{(0.7 - 0.018) - (2 * 0.12) + (0.7 - 0.045)}{0.7} = \frac{1.097}{0.7} = 1.567 \end{aligned}$$

Kritische Werte ($T = 25, K = 3, \alpha = 0.05$): $d_L^* = 1.206, \quad d_U^* = 1.550$

$\Rightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab (es liegt keine positive AK vor), da $d = 1.567 > 1.550 = d_U^*$.

(c) KQ-Methode, weil keine Autokorrelation vorliegt, und die Standardannahmen des linearen Modells erfüllt sind. (Sonst, müssten wir mit der FGLS-Methode die Modellkoeffizienten schätzen.)

4. Unter der Annahme $e \sim (0, \Phi)$ ist der KQ-Schätzer zwar unverzerrt, aber nicht immer effizient. (Effizienz liegt vor, falls $\Phi = \sigma^2 I_T$ gilt.)