Lösung Klausur 2006 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

2. $X'X = \begin{bmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 310 \end{bmatrix}, \qquad X'y = \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{10.310 - 50^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 310 & -50 \\ -50 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 310 \times 200 & -50 \times 1172 \\ -50 \times 200 & 10 \times 1172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3400 \\ 1720 \end{bmatrix}} = \frac{1}{600} \begin{bmatrix} 3400 \\ 1720 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix}$$

3. $R^2 = \dfrac{b'X'y - T(\bar{y})^2}{y'y - T(\bar{y})^2}$

   - $b'X'y = \frac{1}{600}[3400 \quad 1720] \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix} = \frac{2695840}{600} = 4493.067$
   - $T\bar{y}^2 = \frac{1}{T}\left(\sum y_t\right)^2 = \frac{1}{10} 200^2 = 4000$

   $\Longrightarrow R^2 = \dfrac{4493.067 - 4000}{4558 - 4000} = 0.884$

   88,4% der Variabilität von y_t werden durch das lineare Regressionsmodell erklärt.

4. BUE (und nicht nur BLUE)

5. $\hat{y}_0 = x_0'\widetilde{\beta} = [1 \quad 5.5] \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix} = 5.667 + 5.5 \times 2.867 = 21.433$

6. $x_0'\widetilde{\beta} = 21.433$
   $\sigma^2 = 7$
   $z_{(97.5\%)} = 1.96$

$$\begin{aligned} x_0'(X'X)^{-1}x_0 &= [1 \quad 5.5] \frac{1}{600} \begin{bmatrix} 310 & -50 \\ -50 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{600} [310 - 5.5 \times 50 \quad -50 + 5.5 \times 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{600} = \left[310 - 5.5 \times 50 \quad - 5.5 \times 50 + 5.5^2 \times 10\right] = \frac{62.5}{600} = 0.104 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow PI_{y_0}[95\%] &= \left[21.433 \pm 1.96\sqrt{7}\sqrt{0.104+1}\right] \\
&= [21.433 \pm 5.449] \\
&= [15.985; 26.882]
\end{aligned}
$$

7. Punkt- vs. Intervallschätzung: Intervallschätzung enthält Informationen über Unsicherheit der Punktschätzung.

8. $E[e_0] = E[\hat{y}_0 - y_0] = E\left[X_0(\widetilde{\beta} - \beta) + e_0\right] = X_0 \underbrace{E\left[\widetilde{\beta} - \beta\right]}_{=E[\widetilde{\beta}]-\beta} + E[e_0] = 0 + 0 = 0$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1. LNL und LNK üben einen signifikanten Einfluss aus, weil die prob-Werte kleiner als das angenohmene Signifikanzniveau 0.10 sind.

   <u>Für LNL</u>

   Hypothese

   $$H_0 : \beta_{LNL} = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{LNL} \neq 0$$

   Entscheidung

   $$prob = 0.0324 < 0.10 = \alpha$$

   Lehne H_0 auf 10% Signikanzniveau ab.

   <u>Für LNK</u>

   Hypothese

   $$H_0 : \beta_{LNK} = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{LNK} \neq 0$$

   Entscheidung

   $$prob = 0.0647 < 0.10$$

   Lehne H_0 auf 10% Signikanzniveau ab.

2. Hypothese

   $$
   \begin{aligned}
   H_0 &: \beta_{LNL} + \beta_{LNK} = 1 \\
   R\beta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_C \\ \beta_{LNL} \\ \beta_{LNK} \\ \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \beta_{LNL} + \beta_{LNK}
   \end{aligned}
   $$

   Wir müssen entweder einen F-Test oder t-Test durchführen, weil die Fehlervarianz unbekannt ist.

   <u>F-Test</u>

   $$R\widetilde{\beta} = [3.503 - 1.849] = 1.654$$

$$\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R' = \widehat{\sigma}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (X'X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.835 & 1.206 & -0.207 & -0.109 & 0.085 & -0.072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R' = 1.206 - 0.207 = 0.999$$

$$\lambda = \frac{\left(R\widetilde{\beta} - r\right)^2}{\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R'} = \frac{(1.654 - 1)^2}{0.999} = \frac{0.428}{0.999} = 0.428$$

Kritischer Wert

$$F_{(1,T-K),\alpha} = F_{(1,25-6),0.05} = 4.38$$

Entscheidung

$$\lambda = 0.428 \leq 4.38 = F_{(1,19),0.05}$$

Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab.

<u>T-test</u>

$$t = \frac{1.654 - 1}{\sqrt{0.999}} = 0.654$$

Kritischer Wert

$$t_{(T-K),\alpha/2} = t_{(25-6),0.025} = 2.093$$

Entscheidung

$$|t| = |0.654| \leq 2.093 = t_{(19),0.025}$$

Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab.

3. 95% Konfidenzintervall für β_{LNK}

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{\beta}_{LNK} \pm t_{(T-K),\alpha/2}\widehat{\sigma}_{\widetilde{\beta}_{LNK}}\right] &= 95\% \\
\left[\widetilde{\beta}_{LNK} \pm t_{(19),0.025}\widehat{\sigma}_{\widetilde{\beta}_{LNK}}\right] &= 95\% \\
[-1.849 - 2.093 * 0.943] &= 95\% \\
[-3.823, 0.125] &= 95\%
\end{aligned}$$

4. Hypothese

$$H_0 : \beta_{LNL} \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{LNL} > 1$$

$$\alpha = 0.05 \qquad \sigma^2 = 0.04$$

Wir führen hier einen einseitigen Z-Test durch, weil wir unter der Nullhypothese nur eine Restriktion testen und die Fehlervarianz bekannt ist.

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}}{\sigma_{\widetilde{\beta}_{LNL}}} = \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}}{\sigma\sqrt{(X'X)^{-1}_{2,2}}} = \frac{\widehat{\sigma}\left(\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}\right)}{\sigma\sqrt{\widehat{\sigma}^2\,(X'X)^{-1}_{2,2}}} = \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta^0_{LNL}}{\sigma\frac{\widehat{\text{s.e.}}(\widehat{\beta}_{LNL})}{\widehat{\sigma}}} \\
&= \frac{3.503 - 1}{\sqrt{0.04}\frac{1.517}{0.166}} = \frac{2.503}{0.2 * 9.139} = \frac{2.503}{1.828} = 1.37
\end{aligned}
$$

Kritischer Wert

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$$

Entscheidung

$$Z = 1.37 \leq 1.645 = Z_\alpha$$

Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab.

Wir würden H_0 gerade noch annehmen, falls $Z = Z_\alpha$ wäre.

$$Z = 1.37 \overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow}$$

Aus der Tabelle finden wir heraus, dass 1.37 der kritische Wert auf 0.4147 Signifikanzniveau ist.

$$
\begin{aligned}
0.4147 &= 0.5 - \alpha \\
\alpha &= 0.5 - 0.4147 \\
&= 0.085
\end{aligned}
$$

Damit würden wir auf dem 8.5% Signifikanzniveau die Nullhypothese gerade noch annehmen.

5. Hypothese

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \beta_{LNL2} = \beta_{LNK2} = \beta_{LNLLNK} = 0 \\
H_0 &: R\beta = r \quad vs. \quad H_1 : R\beta \neq r
\end{aligned}
$$

$$R\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_C \\ \beta_{LNL} \\ \beta_{LNK} \\ \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=r}$$

$$R\widetilde{\beta} - r = \begin{bmatrix} -0.717 \\ 0.205 \\ 0.144 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\begin{bmatrix} -0.717 & 0.205 & 0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.176 & 2.105 & 3.002 \\ 2.105 & 5.720 & 6.580 \\ 3.002 & 6.580 & 8.563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.717 \\ 0.205 \\ 0.144 \end{bmatrix}}{3 * (0.166)^2} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 0.021 & 0.611 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.717 \\ 0.205 \\ 0.144 \end{bmatrix}}{0.083} = \frac{0.172}{0.083} = 2.072
\end{aligned}
$$

Kritischer Wert

$$F_{(J,T-K),\alpha} = F_{(3,25-6),0.05} = 3.13$$

Entscheidung

$$\lambda = 2.07 \leq 3.13 = F_{(3,19),0.05}$$

Lehne H_0 auf dem 5% Signifikanzniveau nicht ab. LNL2, LNK2 und LNLLNK üben gemeinsam keinen signifikanten Einfluss.

Interpretation: Man kann eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion statt eine Translog-Produktionsfunktion schätzen.

6. Annahmen über die Fehlerterme

$$e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

oder

$$e_t \sim N(0, \sigma^2) i.i.d.$$

7. Falsch. Fehler 1. Art ist die Ablehnung der Nullhypothese, obwohl die Nullhypothese richtig ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Hinweis: Die angegebenen Werte $\hat{e}_1^2 = 0.2$ und $\hat{e}_{30}^2 = 0.1$ sind fehlerhaft, es sind die unquadrierten Werte. Falls mit positiven Werten gerechnet wurde, ist dies ebenfalls richtig.

1. a) Falls $\rho = 0$, da dann $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ und somit die Standardannahmen gelten.

   b) Durbin-Watson-Test: $d = \frac{\sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{30} \hat{e}_t^2}$

$$\sum_{t=1}^{30} \hat{e}_t^2 = \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 + \hat{e}_{30}^2$$

$$d = 75.71/27.74 + 0.1 = 2.719$$

   Hypothese: $H_0 : \rho \geq 0 \quad vs. \quad H_1 : \rho < 0$

$$\left.\begin{aligned} \bar{d} = 4 - d &= 1.281 \\ d_U &= 1.489 \\ d_L &= 1.352 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{d} < d_L \Rightarrow \text{Lehne } H_0 \text{ ab. Negative Autokorrelation angenommen.}$$

   c) Es gibt 2 Möglichkeiten, ρ zu schätzen

      i. $\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2} d = -0.366$ (mit DW-Statistik)

ii. $\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} / \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 &= \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 \\
&= \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 \\
&= 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} \\
\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} &= \frac{2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - \sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{2} \\
&= (2 \times 27.74 - 0.2 + 0.1 - 75.71)/2 \\
&= -10.165 \\
\Rightarrow \hat{\rho} &= -10.165/27.74 = -0.366
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\rho}$ kann $\hat{\Psi}$ bestimmt werden. Damit kann der FGLS-Schätzer $\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Psi}^{-1}y$ bestimmt werden.

2.

$$\begin{aligned}
E(e_t) &= E(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t) = 0.5\sqrt{x_{t2}}E(u_t = 0 \\
E(e_t^2) &= E(0.25x_{t2}u_t^2) = 0.25x_{t2}E(u_t^2) = 0.25x_{t2}\sigma^2 \\
E(e_t e_s) &= E(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t 0.5\sqrt{x_{s2}}u_s) = 0.25\sqrt{x_{t2}}\sqrt{x_{s2}}E(u_t u_s) = 0
\end{aligned}$$

a)

$$E(ee') = 0.25\sigma^2 \underbrace{\begin{bmatrix} x_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{T2} \end{bmatrix}}_{\Psi}, \qquad e \sim N(0, E(ee'))$$

b) GLS-Schätzer, dieser ist BUE (bester der unverzerrten Schätzer), da $e \sim N(0, E(ee'))$

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_{12}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{x_{T2}}} \end{bmatrix}$

3. $H_0 : \sigma_I^2 \leq \sigma_{II}^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_I^2 > \sigma_{II}^2$

$\lambda = \frac{0.462^2}{0.370^2} = 1.559$

a) $F_{(45-5,45-5,0.05)} = 1.69$

Verwerfe H_0 nicht, Varianzen nicht unterschiedlich.

b) OLS, sonst EGLS.