# Einführung in die Ökonometrie

Prof. Bernd Fitzenberger, Ph.D.

SoSe 2019

bernd.fitzenberger@wiwi.hu-berlin.de

Sprechstunde: Di. 10.30-11.45, SPA1, Raum 140,
nach Vereinbarung

# Allgemeine Informationen

- Vorlesung: Mi. 8.30-10, SPA 1, 201

  Wegen des Feiertags am 1. Mai findet die Vorlesung in dieser Woche am Dienstag 30. April von 18:00 - 19:30 in SPA 1, 201 statt.

  Wegen des Humboldt Forum Wirtschaft am 8. Mai findet die Vorlesung in dieser Woche am Montag, 7. Mai im Zeitraum 18:00-19:30 Uhr in SPA 1, 201 statt.

# Allgemeine Informationen

Übungen/Tutorien (5 Termine pro Woche):
SPA 1 (R.203, 125) (klass. Übung)
oder SPA 1, 025 (Computerübung)

- Mi. 12-14 (SPA 1, 203, wöch.): Melina Ludolph
- Mi. 14-16 (SPA 1, 203, wöch.): Melina Ludolph
- Do. 16-18 (SPA 1, 203, wöch.): Julian Emmler
- Fr. 10-12 (SPA 1, 203, wöch.): Maximilian Bach
- Fr. 12-14 (SPA 1, 125, wöch.): Maximilian Bach

- Mo. 12-14 (SPA 1, 025, einzel): Felix Degenhardt, Chris Kolb
- Di. 10-12 (SPA 1, 025, einzel): Felix Degenhardt, Chris Kolb
- Di. 16-18 (SPA 1, 025, einzel): Felix Degenhardt, Chris Kolb

# Moodle

- Weitere Informationen nur über Moodle:
  Bitte anmelden!
- Der Kursschlüssel wird in der ersten Veranstaltung bekanntgegeben

# Materialien

- Termine für (klassische und Computer-)Übungen
- Daten für Stata-Übungen
- Aufgabenblätter / Lösungen
- Weitere Unterlagen (z.B. Stata-Übersicht)
- Vorlesungsinhalte / Zusammenfassungen
- Literaturhinweise

## Prüfung

- Klausur (90 min.; Vorlesungsfolien, Taschenrechner)

# Literatur

Die Hauptquelle ist:

- J. M. Wooldridge
  *Introductory Econometrics - A Modern Approach*, 7th ed.
  South Western, Cengage Learning, 2019.

# Alternative / ergänzende Literatur

- T. Bauer, M. Fertig, C. M. Schmidt
  *Empirische Wirtschaftsforschung - Eine Einführung*
  Springer-Verlag. Berlin, 2009.
- J. Schira
  *Statistische Methoden der BWL und VWL: Theorie und Praxis*, 5. Auflage
  München u.a., 2016.
- J.H. Stock and M.W. Watson
  *Introduction to Econometrics*, 4nd ed.
  Addison Wesley, 2018.

# Alternative / ergänzende Literatur


- P. Winker
  *Empirische Wirtschaftsforschung und Ökonometrie*, 4. Auflage
  Springer-Verlag. Heidelberg, 2017.
- M. Verbeek
  *A Guide to Modern Econometrics*, 5th ed.
  Wiley, 2017.

# Was ist Ökonometrie?

- Sprachliche Neuschöpfung aus den griechischen Wörtern
  - Oikonomia (Verwaltung, Wirtschaft) und
  - metron (Maß, Messen)
- Quantifizierung ökonomischer Zusammenhänge auf Grundlage von
  - Daten,
  - statistischer Theorie und
  - ökonometrischer Software (hier: Stata)

# Entstehung der Ökonometrie: Was ist Ökonometrie?

- Der Begriff der Ökonometrie wurde von Ragnar Frisch und Joseph Schumpeter in den 1930ern entwickelt.
- 1933: Gründung der *Econometric Society* und der Zeitschrift *Econometrica*.
- Ökonometrische Nobelpreisträger:
  - 1980: Lawrence Klein
  - 1989: Trygve Haavelmo
  - 2000: James Heckman und Daniel McFadden
  - 2003: Robert Engle und Clive Granger

Ökonometrische Methoden sind das wichtigste Werkzeug der angewandten Wirtschaftsforschung, um empirische Sachverhalte mit ökonomischen Theorien bzw. theoretischen Hypothesen in Zusammenhang zu bringen.

Es geht darum, auf Basis von Daten

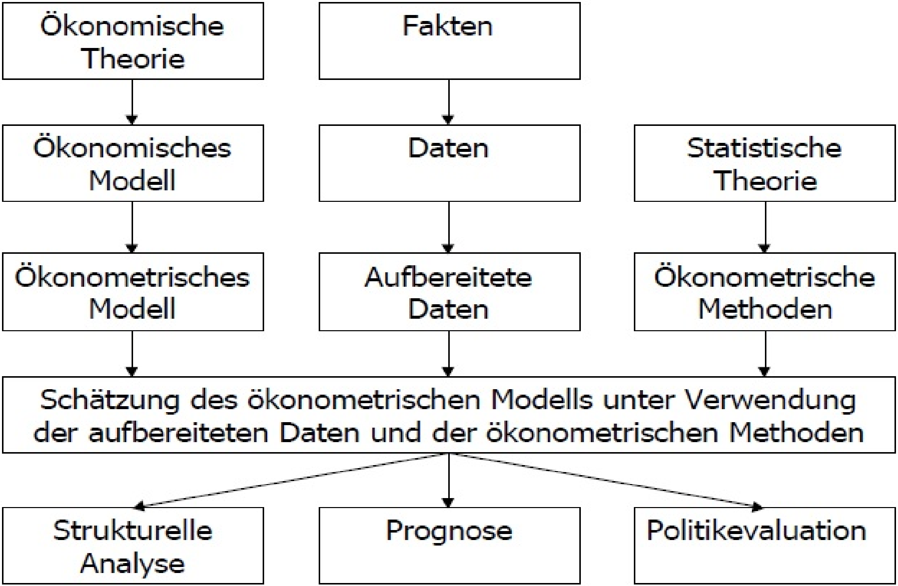
- ökonomische Hypothesen zu testen
- ökonomische Modelle zu quantifizieren
- Prognosen und Politikevaluationen durchzuführen

# Wirtschaftswissenschaften - Eine empirische Wissenschaft

Zusammenkommen von

- Ökonomischer Theorie
- Datenanalyse und -aufbereitung
- Statistisch/ökonometrischer Methodik

zur Analyse ökonomischer Fragestellungen und zur Ableitung wirtschaftspolitischer Empfehlungen


Ökonomische Theorie
Fakten
Ökonomisches Modell
Daten
Statistische Theorie
Ökonometrisches Modell
Aufbereitete Daten
Ökonometrische Methoden
Schätzung des ökonometrischen Modells unter Verwendung der aufbereiteten Daten und der ökonometrischen Methoden
Strukturelle Analyse
Prognose
Politikevaluation

# Ziele der Veranstaltung

i) Grundlegende Methoden und Techniken der empirischen Analyse vermitteln
ii) Typische Argumentation anhand von Beispielen einüben

Umsetzung und Anwendung bauen auf Kenntnissen in ökonomischer Theorie, in statistischen Methoden und in Wirtschaftsstatistik auf. In der Veranstaltung werden die Inhalte der Grundveranstaltungen in Statistik und Ökonometrie sowie Teile der Grundvorlesungen in Mikro- und Makroökonomik vorausgesetzt.

# Beispiele für ökonometrische Fragestellungen

- Wie stark und in welche Richtung ändern sich Wachstum und Inflation, wenn die Zentralbank die Zinsen senkt/erhöht?
- Welche Erhöhung der Rendite kann ich erwarten, wenn sich das Risiko meiner Finanzanlage erhöht?
- Was ist der lohnerhöhende Effekt von Schulausbildung und Berufserfahrung?
- Wie hoch ist das erwartete Ausfallrisiko eines Kredits?
- Wovon hängt die Miete einer Wohnung ab?
- Wie erfolgreich sind Arbeitsmarktprogramme?

# Elemente einer ökonometrische Analyse

- Ökonomische Hypothese oder Modell
- Spezifikation eines “geeigneten” ökonometrischen Modells
- Datengewinnung
- Modellanpassung (“optimale” Parameterschätzung)
- Modellvalidierung
- Testen von Hypothesen (Implikationen ökonomischer Theorien)
- Prognose (+ Beschreibung der Prognoseunsicherheit)

# Voraussetzungen

- Gute Grundlagen in Mathematik
  - Mathematik I
  - Mathematik II (insb. Matrixalgebra)
- Gute Grundlagen in Statistik
  - Statistik I (Deskriptive Statistik)
  - Statistik II (Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik)

# Ziele der LV

- Kennen und verstehen lernen
  - der wichtigsten ökonometrischen Methoden
  - sowie der Schwierigkeiten und Grenzen ihrer Anwendbarkeit
- (Kritische) Einschätzung der Ergebnisse ökonometrischer Untersuchungen
- Grundlagen für Analyse komplexerer Verfahren
- Selbständiges empirisches Arbeiten

  (Ausblick WS: "Angewandte Ökonometrie")

# 1.1 Wiederholung Lineare Algebra

## Matrix

- Eine Matrix ist eine Anordnung von Zahlen (oder anderen Objekten) in Tabellenform (Rechteckschema). Eine $m \times n$-Matrix hat $m$ Zeilen und $n$ Spalten, die als Vektoren aufgefasst werden können (Spalten- bzw. Zeilenvektoren):

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = ((a_{ij}))_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n}$$

$$= (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a'_{(1)} \\ \vdots \\ a'_{(m)} \end{pmatrix}$$

wo: $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})' \in \mathbb{R}^m$ und $a_{(i)} = (a_{i1}, \dots, a_{in})' \in \mathbb{R}^n$

- Matrizenaddition: $A = ((a_{ij})), B = ((b_{ij}))$
  - Dimensionen der Matrizen $A$ und $B$ müssen übereinstimmen! Dann komponentenweise Definition:

$$A + B = ((a_{ij} + b_{ij}))_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

  - Subtraktion funktioniert analog.
- Skalarmultiplikation
  - Jedes Element der Matrix $A$ wird mit dem Skalar $\lambda$ multipliziert:

$$\lambda \cdot A = ((\lambda \cdot a_{ij}))_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

$\Rightarrow$ Die Menge der Matrizen (mit oben eingeführter Matrizen- addition und Skalarmultiplikation) ist ein linearer Vektorraum.

- Matrizenmultiplikation
  - Berührende Dimensionen der Matrizen $A$ und $B$ müssen übereinstimmen:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C} = ((c_{ij}))_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,k} \ ,$$

wobei

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a'_{(i)} b_j$$

(Skalarprodukt der $i$-ten Zeile von $A$ mit der $j$-ten Spalte von $B$)

# Spezielle Matrizen

- $\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Nullmatrix
- $\underset{m\times n}{A}, \quad m = n$ $\Rightarrow$ quadratische Matrix
- $\underset{n\times n}{I_n} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Einheitsmatrix ($n$-dimensional)
- Es gilt: $\underset{n\times n}{A} + \underset{n\times n}{0} = A$ und $\underset{m\times n}{A} I_n = A = I_m A$

# Transponierte einer Matrix

$$\underset{m\times n}{A} = ((a_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{n\times m}{A'} = ((a_{ji}))_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

d.h. Vertauschen von Zeilen und Spalten

- Eine Matrix $A$ heißt symmetrisch, wenn $A = A'$ gilt.
- **Rechenregeln:**
  - $(A + B)' = A' + B'$
  - $(A')' = A$
  - $(\lambda A)' = \lambda A'$ für beliebigen Skalar $\lambda$
  - $(AB)' = B'A'$

# Rang einer Matrix

**Notation:** Rang($A$)=rg($A$)

**Definition:**

- rg($A$)=max. Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (*Zeilenrang*)
  $\overset{!}{=}$ max. Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (*Spaltenrang*).
- $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$

**Beispiele:**

1. $\underset{m\times n}{A}, \underset{n\times n}{B}, \text{ rg}(B)=\text{n} \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(AB)=\text{rg}(A)$
2. $\text{rg}(I_n) = n$
3. $\text{rg}(\lambda A) = \text{rg}(A) \quad (\lambda \neq 0)$
4. $\text{rg}(A') = \text{rg}(A) = \text{rg}(A'A) = \text{rg}(AA')$

# Inverse einer Matrix

- Eine $m \times n$-Matrix $A$ besitzt einen vollen Rang, wenn rg($A$)=min($m, n$) gilt.
- Eine $n \times n$-Matrix $A$ heißt regulär, wenn sie vollen Rang besitzt, d.h. wenn rg($A$) $= n$ gilt. Andernfalls (d.h. wenn rg($A$) $< n$) gilt, heißt $A$ singulär.
- Es sei $A$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $A^{-1}$ (inverse Matrix von $A$) mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

(Reguläre Matrizen heißen daher *invertierbar*.)

- **Spezialfall:** Sei $A$ eine Diagonalmatrix, d.h. $a_{ji} = 0 \; \forall j \neq i$:

$$a_i := a_{ii} \neq 0 \; \forall i \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

- **Eigenschaften:** Für reguläre Matrizen $\underset{n\times n}{A}, \underset{n\times n}{B}$ gilt:
  - $\underset{n\times n}{A'}, \underset{n\times n}{AB}, \underset{n\times n}{BA}$ sind regulär
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Rightarrow$ (z.B.:) $[(AB)^{-1}]' = [(AB)']^{-1} = (B'A')^{-1} = (A')^{-1}(B')^{-1}$

# Aufgabe 1

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Die Matrizen $AA'$ und $(AA')^{-1}$ sind beide symmetrisch. Ist dies ein Zufall? Nein!

Es gilt:

$$AA' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$(AA')^{-1} = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $(A \cdot A')' = (A')' \cdot A' = A \cdot A'$

**Zur Erinnerung:**

Wenn $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt $B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

# Aufgabe 2

Es sei $n \times 2$–Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$.

Dann gilt:

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 3

Es sei $n \times 1$–Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und $X$ wie in Aufgabe 2).

Dann gilt:

$$X'y = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 4

Es sei $\Sigma$ die Varianz–Kovarianz–Matrix von $n$ unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit $Var(X_i) = \sigma^2$.
$I_N$ ist die $n \times n$ Einheitsmatrix.

$$\Sigma = \sigma^2 I_N = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die Inverse:

$$\Sigma^{-1} = (\sigma^2 I_N)^{-1} = \sigma^{-2} I_N = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma^2 \end{pmatrix}$$

mit $I_N = I_N^{-1}$.

Es sei $z$ der $n \times 1$–Vektor der Abweichungen vom Mittelwert $z = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$,

dann gilt

$$z' \Sigma^{-1} z =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}, & \dots & , & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

Summe der quadrierten standardisierten Abweichungen vom Mittelwert.

# Aufgabe 5

Es sei $n \times 2$–Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} (1, x_i) = \sum_{i=1}^n v_i v_i'$$

wobei $v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix}$ und $v_i v_i' = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{pmatrix}$ ist das äussere Produkt (eine $2 \times 2$-Matrix).

**Definition**: Der Rang einer Matrix entspricht dem Minimum der Maximalzahl linear unabhängiger Spalten und der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen der Matrix.

Es sei $n \times 2$–Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$.

Dann gilt ($n \geq 2$):

$$Rang(X) = \begin{cases} 2 & \text{wenn} \quad x_i \neq constant \\ 1 & \text{wenn} \quad x_i = constant \end{cases} \quad \text{und } Rang(X'X) = Rang(X)$$

Beachten Sie dabei: $Rang(A \cdot B) = min\,(Rang(A), Rang(B))$

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: $Rang(A) = 2$ , $Rang(AA') = 2$ und $Rang(A'A) = 2$

Ergebnis: Wenn eine quadratische Matrix (Anzahl Zeilen=Anzahl Spalten) den vollen Rang hat, dann ist sie invertierbar.

Daher ist $2 \times 2$–Matrix $AA'$ invertierbar und $3 \times 3$–Matrix $A'A$ nicht invertierbar.

Zusammenhang zwischen Invertierbarkeit von $X'X$ und Streuung von $x_i$:

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$det(X'X) = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)(\sum x_i) = n^2(\frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2) = n^2 \cdot s_X^2$$

d.h. genau dann hat $X'X$ eine Determinante von null ($\Leftrightarrow$ $X'X$ ist nicht invertierbar), wenn die Streuung von $x_i$ null ist ($s_X^2 = 0$).

# 1.2 Wiederholung Statistik: Hypothesentest, Konfidenzintervall, Kausalität versus Korrelation

**Mittelwerttest**

Wir betrachten den Mittelwert einer Stichprobe $\{X_1, \ldots X_N\}$ (unabhängig, identisch verteilt)

Formulierung der Nullhypothese

Mittlerer/Durchschn. Wert der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$

$H_0$: $\mathbb{E}(X_i) = \mu_0$ ($\hat{=}$ Erwartungswert), Parameter $\mu_0$ a priori bekannt

## Formulierung der Alternativhypothese

$$H_A: \quad \begin{array}{llll} \text{Fall a):} & H_A: & \mathbb{E}X > \mu_0 & \text{einseitige Hypothese} \\ \text{Fall b):} & H_A: & \mathbb{E}X < \mu_0 & \text{einseitige Hypothese} \\ \text{Fall c):} & H_A: & \mathbb{E}X \neq \mu_0 & \text{zweiseitige Hypothese} \end{array}$$

## Mittelwert in der Stichprobe

$$\overline{X} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Selbst, wenn $\mathbb{E}(X_i) = \mu_0$ zutrifft, streut $\overline{X}$ um $\mu_0$ als Zufallsvariable.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

$$\overset{\text{unabhg.}}{=} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Var}(X_i) \overset{\text{ident.Vert.}}{=} \frac{1}{N^2}\cdot N\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}, \quad \text{wobei } \ \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_i)$$

Unter $H_0$ (wenn $\mathbb{E}X_i = \mu_0$) ist $\overline{X}$ (bei großem $N$) ungefähr $\mathcal{N}\left(\mu_0, \sigma^2/N\right)$ verteilt.

Wahrscheinlichkeitsdichte Standardnormalverteilung

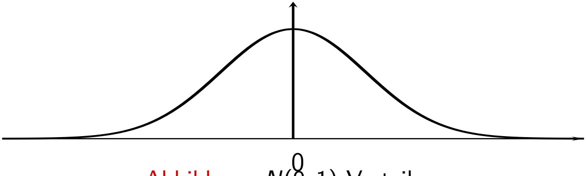



Abbildung: $N(0,1)$-Verteilung

Ablehnung von $H_0$, wenn die Abweichung $\overline{X} - \mu_0$ in Richtung der Alternativhypothese – in Relation zur zu erwartenden Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ – groß ist
($\hat{=}$ signifikante Abweichung)

Berechnung der Teststatistik

Unter $H_0$ gilt approximativ:

$$z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{(standardnormalverteilt)}$$

Testentscheidung

$z > z_{crit}^{95\%}$ mit Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$, obwohl $H_0$ zutrifft
$\hat{=}$ Möglicher Fehler 1. Art erfolgt mit Wahrscheinlichkeit 5% unter $H_0$

Konservatives Testen: Fehler 1. Art wird (nach oben) begrenzt – typischerweise $\alpha = 5\%$

| Drei Fälle: | Wert der Teststatistik $z$ | Entscheidung |
|---|---|---|
| a.) $H_A : \mathbb{E}(X_i) > \mu_0$ | $z \leq z_{crit}^{95\%} = 1,645$ | $H_0$ nicht ablehnen |
| | $z > z_{crit}^{95\%} = 1,645$ | $H_0$ ablehnen |
| b.) $H_A : \mathbb{E}(X_i) < \mu_0$ | $z \geq -z_{crit}^{95\%} = -1,645$ | $H_0$ nicht ablehnen |
| | $z < -z_{crit}^{95\%} = -1,645$ | $H_0$ ablehnen |
| c.) $H_A : \mathbb{E}(X_i) \neq \mu_0$ | $-z_{crit}^{97,5\%} = -1,96 \leq z \leq z_{crit}^{97,5\%} = 1,96$ | $H_0$ nicht ablehnen |
| | $z > 1,96$ oder $z < -1,96$ | $H_0$ ablehnen |

Im Folgenden behandeln wir beispielhaft Fall a.). Es wird unterstellt, dass die Teststatistik den Wert $\bar{z}$ annimmt.

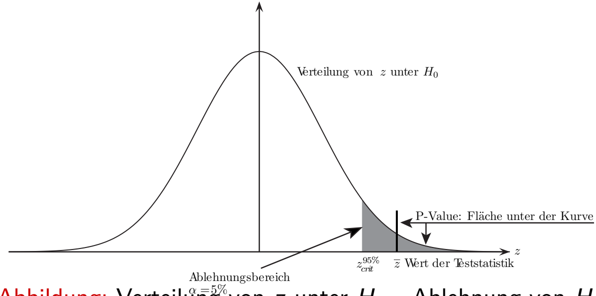



Abbildung: Verteilung von $z$ unter $H_0$ – Ablehnung von $H_0$

P-Value:$=\mathbb{P}(z \geq \overline{z}|H_0)$

$\rightarrow$ Der P-Value gibt das kleinste Signifikanzniveau an, zu dem $H_0$ verworfen werden kann.

Ablehnung: Wert der Teststatistik $\overline{z} > z_{crit}^{95\%} = 1,645$ kritischer Wert. Dies ist exakt dieselbe Aussage wie (äquivalent zu): P-Value $< \alpha =$ "Fehler 1. Art" $= \mathbb{P}(z > z_{crit}^{95\%}|H_0)$

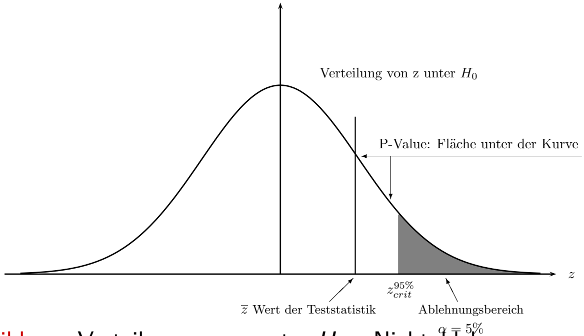



Abbildung: Verteilung von $z$ unter $H_0$ – Nichtablehnung von $H_0$

Nichtablehnung: Wert der Teststatistik $\overline{z} < z_{crit}^{95\%}$ kritischer Wert

Dies ist äquivalent zu: P-Value $> \alpha =$ "Fehler 1. Art"

Problem: $\sigma$ ist nicht bekannt und muss geschätzt werden
Empirische Standardabweichung

$$s := \sqrt{s^2} \quad \text{und} \quad s^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$$

Teststatistik, die berechnet werden kann:

$$t := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \sim t_{N-1}\text{-verteilt unter } H_0 \text{ (}t\text{-verteilt mit } N-1 \text{ Freiheitsgraden)}$$

→ Bei hinreichend großem $N$ entspricht die $t_{N-1}$-Verteilung approximativ der Standardnormalverteilung

Daumenregel ($\alpha \approx 5\%$):

| | | |
|---|---|---|
| Zweiseitiger Test: | $\|t\| > 2$ | $H_0$ ablehnen |
| | $\|t\| < 2$ | $H_0$ nicht ablehnen |
| Einseitiger Test: | Fall a) $t > 1,65$ | $H_0$ ablehnen |
| | Fall b) $t < -1,65$ | $H_0$ ablehnen |

Erweiterung auf zwei Stichproben: Stimmen Erwartungswerte in zwei Stichproben überein?

Beispiele:

i) Ist das Wirtschaftswachstum in zwei Branchen gleich hoch?

ii) Verdienen Männer und Frauen im Durchschnitt den gleichen Lohn?

Zwei Fälle:

1. Verbundene Stichproben
2. Unverbundene Stichproben

ad 1) Verbundene Stichproben

$\{(X_1, Y_1), \ldots, (X_N, Y_N)\}$ paarweise verbunden

(wie in (i) Beispiel oben $\hat{=}$ Wachstum in einem Jahr in zwei Branchen)

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_x = \mu_y \\ H_A &: \mu_x \neq \mu_y \end{aligned}$$

Definiere paarweise Differenz:

$$d_i \quad := \quad X_i - Y_i$$

$$\begin{aligned} H_0 &\quad : \quad \mu_d = 0 \\ H_A &\quad : \quad \mu_d \neq 0 \end{aligned}$$

Teststatistik analog zum Fall einer Stichprobe

$$t := \frac{\overline{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{N}}}$$

$$\mathrm{Var}(d_i) = \mathrm{Var}(X_i - Y_i) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(Y_i) - 2\,\mathrm{Cov}(X_i, Y_i)$$

$\mathrm{Var}(d_i)$ kann entweder durch $s_d^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(d_i - \overline{d})^2$ oder aus $s_X^2$, $s_Y^2$ und $s_{X,Y}$ geschätzt werden.

ad 2) Unverbundene Stichproben

$$\begin{array}{ll} X_1, ..., X_{N1} & N_1 \text{ Beobachtungen} \\ Y_1, ..., Y_{N2} & N_2 \text{ Beobachtungen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_x = \mu_y \\ H_A &: \quad \mu_x \neq \mu_y \end{aligned}$$

Betrachte Differenz der empirischen Durchschnitte:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \overline{X} - \overline{Y} \\ H_0 &: \quad \mathbb{E}\Delta = 0 \\ H_A &: \quad \mathbb{E}\Delta \neq 0 \end{aligned}$$

Frage: Was ist die zu erwartende Streuung von $\Delta$ unter $H_0$?

$$\mathrm{Var}(\Delta) = \mathrm{Var}(\overline{X} - \overline{Y}) = \underbrace{\mathrm{Var}(\overline{X})}_{=\sigma_X^2/N_1} + \underbrace{\mathrm{Var}(\overline{Y})}_{=\sigma_Y^2/N_2} - 2\underbrace{\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})}_{=0}$$

Annahme unabhängiger Stichproben $\Rightarrow \mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$

Empirische Varianz von $\Delta$:

$$s_\Delta^2 = \frac{s_X^2}{N_1} + \frac{s_Y^2}{N_2} = \frac{1}{N_1(N_1-1)} \sum_{i=1}^{N_1} (X_i - \overline{X})^2 + \frac{1}{N_2(N_2-1)} \sum_{i=1}^{N_2} (Y_i - \overline{Y})^2$$

Teststatistik:

$$t = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{N_1} + \frac{s_Y^2}{N_2}}}$$

Ein Beispiel folgt im Rahmen des ökonometrischen Teils (Abschnitte 2.2+2.3, Regression auf Dummyvariable).

**Konfidenzintervall**

Wir betrachten:

- Mittelwertschätzer $\overline{X}$ (analog auf verbundene Stichproben anwendbar)
- Konfidenzniveau $1-\alpha$ (typischerweise 95%)
- $\mathbb{E}X_i = \mu_x$

Welches Intervall um $\mu_x$ umfasst mit Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$ den geschätzten Wert $\overline{X}$ ?

Ansatz:

$$\mathbb{P}\left(\mu_x - d \leq \overline{X} \leq \mu_x + d\right) = 1-\alpha$$

Es gilt:

$$d = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot z_{crit}^{1-\alpha/2} \quad \text{wobei kritischer Wert } z_{crit}^{1-\alpha/2} \text{ aus } \mathcal{N}(0,1)\text{-Verteilung}$$

Beispiel: $\alpha = 5\%$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $d = \frac{\sigma \cdot 1{,}96}{\sqrt{N}}$

Konfidenzintervall ist Intervall

$$\left[\overline{X} - d, \overline{X} + d\right] \qquad \hat{=} \qquad \left[\overline{X} \pm \frac{s_x}{\sqrt{N}} z_{crit}^{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

wobei $\sigma$ durch $s_x$ ersetzt wird

Mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ liegt das Konfidenzintervall so, dass es $\mu_x$ umfasst.

# Kausalität vs. bloße Assoziation (Korrelation)

Korrelation $\Leftrightarrow \text{Cov}(Y, X) \neq 0$

Das heißt nicht, dass ceteris paribus

$$\frac{\partial Y}{\partial X} \neq 0$$

ist oder dasselbe Vorzeichen aufweist.

# Kausalität vs. Korrelation <Fortsetzung>

Fragen:

- Welchen kausalen Effekt hat eine Variable (Ausbildung) auf eine andere Variable (Einkommen)?
- Grundlegend: ceteris paribus Betrachtung
  - Effekt eines zusätzlichen Ausbildungsjahres auf das Einkommen, falls alle anderen Einflussfaktoren konstant bleiben
  - Kann eine Korrelation bzw. eine Schätzung des Ceteris-Paribus-Effektes kausal interpretiert werden?

# Kausalität vs. Korrelation <Fortsetzung>

- In empirischen Studien: Werden hinreichend viele andere Faktoren festgehalten (ceteris-paribus), um auf Kausalität schließen zu können?
  - kein Problem bei "geeignetem" Experiment
  - Herausforderung in Ökonomie: oft nichtexperimentelle Daten! Ausbildungsjahre können den einzelnen Personen nicht zufällig zugeordnet werden und können mit unbeobachteten Variablen wie Intelligenz/Motivation zusammenhängen.